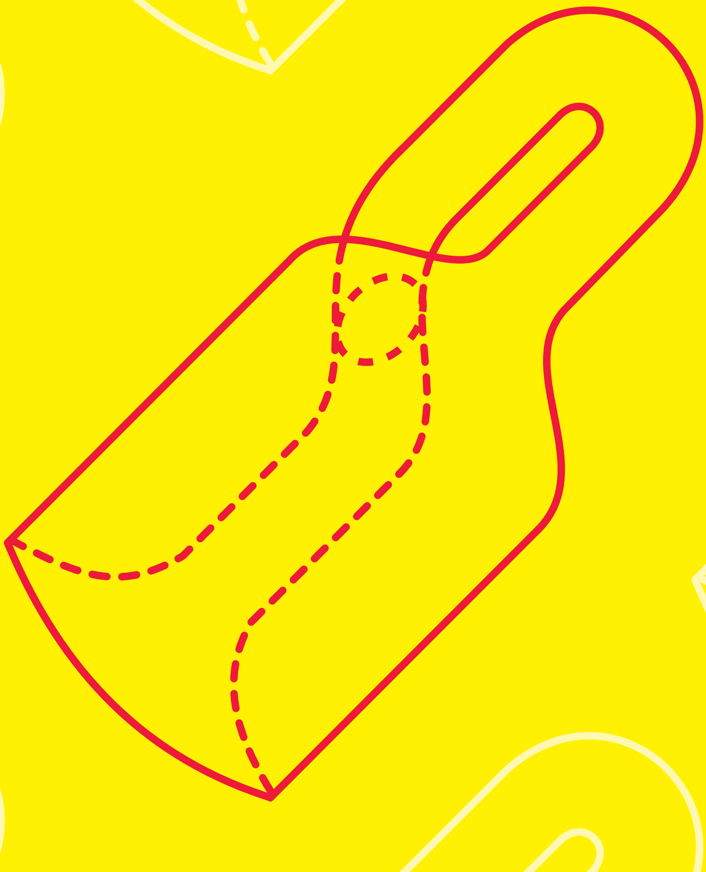
Matija Cencelj
Dušan Repovš

TOPOLOGIJA



PITAGORA

TOPOLOGIJA

Univerza v *Ljubljani*
Pedagoška fakulteta

TOPOLOGIJA

Matija Cencelj & Dušan Repovš

Ljubljana, 2011

izr. prof. dr. Matija Cencelj & prof. dr. Dušan Repovš

TOPOLOGIJA

Recenzenta: prof. dr. Neža Mramor-Kosta in izr. prof. dr. Petar Pavešić

Izdala in založila: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Za založnika: izr. prof. dr. Janez Krek, dekan

Zbirka: Pitagora

Oblikovanje in računalniški prelom: mag. Matej Kolar

Tisk: Tiskarna Littera picta d.o.o. Ljubljana

Naklada: 200 izvodov, 1. izdaja, 1. ponatis

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

515.1(075.8)

CENCELJ, Matija
Topologija / Matija Cencelj & Dušan Repovš. - 1. ponatis. - Ljubljana : Pedagoška fakulteta, 2011. – (Zbirka Pitagora)

ISBN 978-86-7735-051-2
1. Repovš, Dušan, 1954-
254230528

Kazalo

Slike

Predgovor

Knjiga je že drugi učbenik v seriji »Pitagora«, ki je namenjena študentom matematike (z vezavami) na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani. Pričujoči učbenik povzema vsebino predavanj in seminarjev pri istoimenskem predmetu, ki se predava v 4. letniku študija. Seveda pa bo koristil tudi drugim, ki jih zanima to zanimivo področje sodobne matematike.

Za koristne nasvete in popravke se zahvaljujeva recenzentoma, za tehnično pomoč pa Metki Kenda in mag. Mateju Kolarju.

V Ljubljani, 30. 6. 2001 *Avtorja*

Uvod

Topologija se je razvila šele v prejšnjem stoletju, vendar danes sodi med glavna področja sodobne matematike. Po eni strani gre za *posplošitev* geometrije, kajti geometer ne loči med *skladnimi* liki, medtem ko topolog ne dela razlik med prostoroma, ki sta *homeomorfna*. Ker sta vsaka dva skladna lika tudi topološko ekvivalentna, obratno pa ne velja, je torej topološki pogled manj »selektiven« od geometrijskega. Po drugi strani lahko topologijo štejemo za posplošitev klasične analize, ker namesto evklidskih prostorov (premice $\mathbb{R}$, ravnine $\mathbb{R}^2$, itd.) obravnava splošnejše topološke prostore (ki so lahko tudi brez kakršnekoli metrike).

Osnovna pojma v topologiji sta *okolica* in *zveznost*. Točke, ki ležijo v neki okolici, so si »blizu«, zvezne preslikave med topološkimi prostori pa to relacijo ohranjajo, kajti bližnje točke vselej preslikajo v bližnje točke. Posebej pomembne zvezne preslikave so *homeomorfizmi* in osnovni problem topologije je klasifikacija topoloških prostorov do homeomorfizma natančno (tj. razvrščanje po homeomorfnostnih razredih). Ta problem je rešen za številne razrede prostorov, vendar npr. še vedno ne znamo klasificirati topoloških 3–mnogoterosti, tj. prostorov, ki v vsaki točki izgledajo kot $\mathbb{R}^3$.

Sodobna topologija se deli na *splošno*, *algebrsko* ter *geometrijsko* topologijo (slednji pravimo tudi topologija mnogoterosti). Namen tega učbenika je predstaviti osnovne pojme splošne topologije, ki so temeljnega pomena za uspešen študij številnih drugih področij, predvsem v analizi. Poleg tega bomo obdelali tudi nekaj osnovnih pojmov geometrijske topologije, predvsem topološko klasifikacijo kompaktnih ploskev. Algebrske topologije nismo vključili, ker bi bil potem učbenik preobsežen. Čeprav bomo v knjigi govorili o zelo splošnih topoloških prostorih, bomo največ časa posvetili *metričnim* prostorom, saj tudi v praksi največkrat srečujemo prostore, ki dopuščajo metriko. Zato smo se pretirani splošnosti namenoma izogibali. Dodane so tudi številne vaje, ki so namenjene študentom za utrjevanje in poglabljanje snovi.

Poglavje 1

Topološki prostori

1.1 Osnovni pojmi

Najprej ponovimo osnovne pojme o metričnih prostorih. *Metrika* na dani množici M je taka preslikava

$$d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

da velja:

- za poljubni točki x in y v M velja $d(x,y) \geq 0$ in $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$ za poljubni točki $x, y \in M$;
- za poljubne točke $x, y, z \in M$ velja trikotniška neenakost

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,.$$

Množico M skupaj z metriko d imenujemo *metrični prostor* (M,d).

Naj bo (M,d) neki metrični prostor, ki naj bo do nadaljnjega naš univerzum. To pomeni, da bodo vse množice, ki jih bomo omenili, podmnožice v M. Naj bo $x \in M$, r pa naj bo neko pozitivno realno število. Množico

$$K(x, r) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$$

imenujemo *odprta krogla* s središčem x in radijem r. Če množica $U \subset M$ vsebuje kakšno odprto kroglo s središčem x, se U imenuje *okolica* točke x. Množici U pravimo *odprta*, če je okolica vsake svoje točke. Brez težav se prepričamo, da je vsaka odprta krogla tudi odprta množica.

Oglejmo si nekatere temeljne lastnosti odprtih množic v metričnem prostoru (dokažite jih za vajo).

1. Poljubna unija odprtih množic je spet odprta množica.

2. Končni presek odprtih množic je tudi odprta množica.

3. Prazna množica in ves prostor M sta odprti množici.

Kot smo že omenili, je topološki prostor posplošitev metričnega prostora. V topološkem prostoru nimamo pojma razdalje (metrike) in tako tudi ne pojma (metričnih) krogel, topološko strukturo damo množici M tako, da povemo, katere množice v njej so odprte. Za družino vseh odprtih množic pa zahtevamo, da zadošča zgornjim trem aksiomom. Povejmo to še čisto formalno.

Definicija. *Topološki prostor* (E, τ) je množica E skupaj s tako družino τ svojih podmnožic, da velja:

1. unija poljubne množice elementov iz τ je spet v τ;

2. presek vsake končne množice elementov iz τ je spet v τ;

3. prazna množica $\emptyset$ in cela množica E sta v τ.

Družini τ rečemo *topologija* v množici E, njenim elementom pa *odprte množice* v topološkem prostoru (E, τ).

Primeri.

1. Naj bo E poljubna množica. Topologiji, ki jo sestavljata množici $\emptyset$ in E, rečemo *trivialna* ali *indiskretna* topologija. Očitno je to topologija na E z najmanjšim možnim številom odprtih množic.

2. Topologiji $\tau = \mathcal{P}E$, ki jo sestavljajo vse podmnožice v množici E, rečemo *diskretna* topologija. Očitno je to topologija na E z največjim možnim številom odprtih množic. Med drugim je vsak singleton $\{x\}$, $x \in E$, odprta množica.

3. Omenili smo že, da je v vsakem metričnem prostoru odprta metrična krogla okolica vsake svoje točke. To pomeni, da je vsak metrični prostor tudi topološki prostor, v katerem so odprte množice tiste množice, ki vsebujejo kakšno odprto metrično kroglo okoli vsake svoje točke. Med takimi topološkimi prostori je pomemben primer prostor $\mathbb{R}$ realnih števil z običajno metriko $d(x, y) = |x - y|$, za $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Posebej omenimo še ravnino $\mathbb{R}^2$ z evklidsko metriko

   $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

   za $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Pozneje bomo pokazali, da tudi metrika $r(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ porodi isto topologijo kot evklidska metrika.

$\diamond$

Razlog, da bomo obravnavali splošnejše topološke prostore od metričnih je predvsem v tem, da bomo opazovali tiste lastnosti, ki niso odvisne od izbrane metrike. Le izjemoma bomo omenili kakšen topološki prostor, ki ne dopušča nobene metrike. Taki topološki prostori zares obstajajo. Primer je prostor (X, τ), kjer ima množica X vsaj dve točki, τ pa naj bo trivialna topologija. Naj bo d neka metrika v X, x in y pa naj bosta različni točki v X. Tedaj je $d(x, y) > 0$ in če je $0 < r < d(x, y)$, odprta krogla $K(x, r)$ vsebuje točko x, točke y pa ne. V topologiji, ki jo določa metrika d, je odprta krogla $K(x, r)$ seveda odprta množica, torej element topologije. To pomeni, da nobena metrika v X ne da trivialne topologije, ki vsebuje le $\emptyset$ in X.

Na začetku, ko se še privajamo na topološke prostore, jih bomo res pisali kot pare. Sčasoma pa jih bomo pisali le z enim simbolom (kot množice), pri tem pa imeli v mislih izbrano topologijo, s katero so opremljeni. Podobno kot pri metričnih prostorih, bomo tudi pri topoloških prostorih rekli elementu prostora *točka*.

Definicija. Množici F v topološkem prostoru E rečemo *zaprta*, če je njen komplement $E \setminus F$ odprta množica.

Ker je v dani množici vsaka podmnožica natanko določena s svojim komplementom, lahko iz množice E »naredimo« topološki prostor tudi tako, da povemo katere množice so v njem zaprte.

Trditev 1.1.1. *Družina $\mathcal{F}$ v množici E je družina zaprtih množic neke topologije v E natanko tedaj, ko velja:*

1. *presek poljubne množice elementov iz $\mathcal{F}$ je spet v $\mathcal{F}$;*
2. *unija vsake končne množice elementov iz $\mathcal{F}$ je spet v $\mathcal{F}$;*
3. *prazna množica $\emptyset$ in cela množica E sta v $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Vaja.

□

Če ima množica več kot en element, dopušča več različnih topologij. Nekatere med njimi lahko primerjamo.

Definicija. Imejmo v množici E dve topologiji τ_1 in τ_2 in naj velja $\tau_1 \subset \tau_2$. Tedaj pravimo, da je τ_2 *finejša* od τ_1 ali da je τ_1 *bolj groba* od τ_2.

Diskretna topologija je finejša od vsake druge, trivialna topologija pa je najbolj groba od vseh topologij.

Definicije. Naj bo x točka topološkega prostora (E, τ). Množici U v tem topološkem prostoru rečemo *okolica* točke x, če obstaja taka množica $G \in \tau$, da velja
$$x \in G \subset U\,.$$
Okolici točke x, ki je odprta množica, rečemo tudi *odprta okolica* točke x.
Družini vseh okolic dane točke $x \in E$ rečemo tudi *sistem okolic* točke x.

Trditev 1.1.2. *V topološkem prostoru je množica odprta natanko tedaj, ko je okolica vsake svoje točke.*

Dokaz. Vaja. (Namig: izrazite to množico kot unijo odprtih množic.)

□

Topologijo lahko vpeljemo v množico tudi tako, da za vsako točko povemo, kaj so njene okolice. To je zelo prikladno za vpeljavo topologije v vektorski prostor, kar si bomo pobliže ogledali v poglavju 6, v razdelku 6.2.

Definicije. Naj bo A poljubna množica v nekem topološkem prostoru. *Notranjost* $\operatorname{int} A = A^\circ$ množice A je največja odprta množica, ki je še vsebovana v A.

Zaprtje $\operatorname{cl} A = \overline{A}$ množice A je najmanjša zaprta množica, ki še vsebuje A.

Rob ∂A množice A je razlika $\overline{A} \setminus A^\circ$.

Iz definicije neposredno sledi, da za poljubno množico A velja

$$A^\circ \subset A \subset \overline{A}\,.$$

Primer. Oglejmo si množico $\mathbb{Q}$ vseh racionalnih števil v množici $\mathbb{R}$ vseh realnih števil z običajno topologijo, tj. tisto, ki jo porodi metrika $d(x, y) = |x - y|$, za poljubni $x, y \in \mathbb{R}$. Ker v poljubni okolici vsakega racionalnega števila obstajajo iracionalna števila, je notranjost $\mathbb{Q}^\circ$ prazna množica. Ker tudi v vsaki okolici kakšnega iracionalnega števila leži kakšno racionalno število, je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ in tako tudi $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. ◇

Trditev 1.1.3. *Naj bosta A, B poljubni podmnožici topološkega prostora X. Potem veljajo naslednje lastnosti.*

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;
2. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;
3. $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$;
4. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Dokaz. Dokažimo trditev 4 (ostale pa naj bodo za vajo). Velja

$$A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}\,.$$

Ker je $\overline{A}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A, je $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Prav tako je tudi $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ in tako velja

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}\,.$$

Za obratno inkluzijo sklepamo takole. Iz $A \subset \overline{A}$ in $B \subset \overline{B}$ sledi $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Množica $\overline{A \cup B}$ je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje $A \cup B$ in ker smo pokazali, da množica $\overline{A} \cup \overline{B}$, ki je tudi zaprta, vsebuje $A \cup B$, sledi

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

□

Zaenkrat le omenimo, da lahko topologijo v množici E določimo tudi z *operatorjem zaprtja*

$$A \longmapsto \overline{A}\,,$$

ki vsaki množici $A \subset E$ priredi njeno zaprtje $\overline{A}$. Izkaže se, da je preslikava $\Phi\colon \mathcal{P}E \to \mathcal{P}E$ operator zaprtja za neko topologijo natanko tedaj, ko zadošča naslednjim pogojem.

1. $\Phi(\emptyset) = \emptyset$
2. $\forall A \subset E\colon\ \Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$
3. $\forall A \subset E\colon\ A \subset \Phi(A)$
4. $\forall A, B \subset E\colon\ \Phi(A) \cup \Phi(B) = \Phi(A \cup B)$

Mi se bomo pri tem razmišljanju o topologiji omejili skoraj izključno na prostore, ki imajo še eno lepo lastnost.

Definicija. Topološkemu prostoru pravimo *Hausdorffov*, če za poljubni točki x in y v tem prostoru obstajata taki okolici U_x za x in U_y za y, da velja

$$U_x \cap U_y = \emptyset \,.$$

Vaje.

1. Dokažite, da je odprta krogla v metričnem prostoru okolica vsake svoje točke.
2. Dokažite trditev 1.1.1.
3. Dokažite trditev 1.1.2.
4. Dokažite, da za poljubno množico obstajata njena notranjost in njeno zaprtje.
5. Dokažite, da točka x v topološkem prostoru E leži na robu množice $A \subset E$ natanko tedaj, ko vsaka okolica točke x vsebuje vsaj eno točko iz A in vsaj eno točko iz $E \setminus A$.
6. Dokažite, da za poljubno množico A v topološkem prostoru E velja
$$E = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (E \setminus A)^\circ \,,$$
kjer $\sqcup$ pomeni disjunktno unijo.
7. Dokažite, da je množica odprta natanko tedaj, ko je enaka svoji notranjosti.
8. Dokažite, da je množica zaprta natanko tedaj, ko je enaka svojemu zaprtju.
9. Poiščite notranjost, rob in zaprtje intervala $[0, 1)$ v $\mathbb{R}$.

10. Dokažite, da je v Hausdorffovem prostoru vsaka točka zaprta množica. (Namig: vzemite neko točko in izrazite njen komplement kot unijo odprtih množic.)

1.2 Baza topologije

Definicija. V topološkem prostoru (E, τ) rečemo družini $\mathcal{B} \subset \tau$ *baza topologije*, če se da vsak element iz τ izraziti kot unija nekaj elementov iz $\mathcal{B}$.

Primeri.

1. Družina τ je baza za τ.
2. V diskretnem prostoru E je $\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in E\}$ baza topologije.
3. V $\mathbb{R}$ z običajno (evklidsko) topologijo je družina odprtih intervalov (ki so ravno odprte krogle za evklidsko metriko) baza topologije.
4. V poljubnem metričnem prostoru je družina vseh odprtih krogel baza topologije.
5. V poljubnem metričnem prostoru je družina vseh odprtih krogel z racionalnim radijem baza topologije.

$\diamond$

Družine odprtih množic, ki so baze dane topologije karakterizira naslednji izrek.

Izrek 1.2.1. *Naj bo $\mathcal{B} \subset \tau$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

1. *$\mathcal{B}$ je baza za τ.*

2. *Za vsak $G \in \tau$ in vsak $x \in G$ obstaja tak $B \in \mathcal{B}$, da je $x \in B \subset G$.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): $G = \bigcup_J B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$, torej obstaja vsaj en tak B_j, da je $x \in B_j \subset G$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Poljubni element $G \in \tau$ moramo izraziti kot unijo elementov iz $\mathcal{B}$. Ker za vsako točko $x \in G$ obstaja tak $B_x \in \mathcal{B}$, da je $x \in B_x \subset G$, velja

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x \,.$$

□

Izrek 1.2.2. *Naj bosta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi za topologiji τ in τ' na množici E. Tedaj je topologija τ' finejša od topologije τ natanko tedaj, ko za vsak $x \in E$ in vsak $B \in \mathcal{B}$, ki vsebuje x, obstaja tak $B' \in \mathcal{B}'$, da velja*

$$x \in B' \subset B \,.$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da je pogoj zadosten, to je, da iz navedenega pogoja sledi, da je τ' finejša od τ. To pa pomeni, da za $U \in \tau$ velja tudi $U \in \tau'$.

Naj bo $U \in \tau$ in $x \in U$. Ker je $\mathcal{B}$ baza za τ, obstaja tak $B_x \in \mathcal{B}$, da velja $x \in B_x$. Po privzetku obstaja tak $B'_x \in \mathcal{B}'$, da je

$$x \in B'_x \subset B_x \subset U \,.$$

Tedaj pa velja

$$U = \bigcup_{x \in U} B'_x$$

in je tako $U \in \tau'$.

Pokažimo, da je omenjeni pogoj tudi potreben, to je, da je pogoju zadoščeno, če je τ' finejša od τ. Naj bo $x \in X$ in $B \in \mathcal{B}$ tak, da je $x \in B$. Ker je

$$B \in \mathcal{B} \subset \tau \subset \tau' ,$$

po trditvi 1.2.1 obstaja tak $B' \in \mathcal{B}'$, da je $x \in B' \subset B$.

□

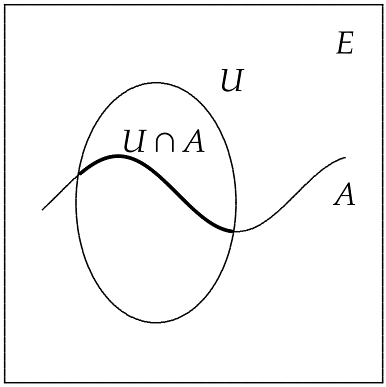
Vaje.

1. Dokažite, da je množica A v topološkem prostoru z bazo $\mathcal{B}$ odprta natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in A$ obstaja tak element B baze $\mathcal{B}$, da velja $x \in B \subset A$.
2. Dokažite, da je množica odprtih intervalov, katerih širina je $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, baza običajne topologije v $\mathbb{R}$.
3. Dokažite, da je množica odprtih kvadratov baza evklidske topologije v ravnini $\mathbb{R}^2$.
4. Dokažite, da je družina $\mathcal{B}$ množic v E baza za neko topologijo v E natanko tedaj, ko veljata naslednji lastnosti:
   (a) $E = \bigcup \mathcal{B}$;
   (b) presek končno mnogih elementov družine $\mathcal{B}$ lahko izrazimo kot unijo kakšne poddružine v $\mathcal{B}$.

1.3 Topološki podprostor

Definicija. Naj bo A množica v topološkem prostoru (E, τ). Topologijo τ_A v množici A, ki jo sestavljajo množice

$$U \cap A \,, U \in \tau \,,$$



Slika 1.1. Topologija podprostora

imenujemo *inducirana topologija* ali *relativna topologija* ali tudi *topologija podprostora*, za topološki prostor (A, τ_A) pa rečemo, da je *podprostor* topološkega prostora (E, τ).

Preverimo, da je zgoraj definirana družina τ_A res topologija na A: unija poljubne družine J elementov iz τ_A je spet v τ_A, saj velja

$$\bigcup_{i \in J} (U_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right) \cap A;$$

presek poljubne končne družine elementov iz τ_A je spet v τ_A, saj velja

$$(U_1 \cap A) \cap \ldots \cap (U_n \cap A) = (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \cap A;$$

seveda sta tudi $\emptyset = \emptyset \cap A$ in $A = E \cap A$ v τ_A.

Primeri.

1. Kaj so odprte množice v podprostoru $[0,1]$ topološkega prostora $\mathbb{R}$? Ker so v $\mathbb{R}$ odprte množice poljubne unije odprtih intervalov, so v $[0,1]$ odprte množice unije poljubnih družin naslednjih množic: intervalov oblike (a,b), kjer velja $0 < a < b < 1$, intervalov oblike $[0,a)$, kjer je $0 < a < 1$ in intervalov oblike $(a,1]$, kjer je tudi $0 < a < 1$.

2. Topologija v $\mathbb{R}$ inducira diskretno topologijo v $\mathbb{N}$, saj za vsako naravno število n velja
$$\{n\} = (n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{N}\,.$$

$\diamond$

Če za kakšno lastnost topoloških prostorov velja, da se podeduje na vsak podprostor, ji rečemo *dedna* (ali *hereditarna*) lastnost.

Kot so nam povedali zgornji primeri, so v podprostoru odprte tudi take množice, ki v celem prostoru niso odprte, zato za kakšno tako množico rečemo, da je *odprta v A*.

Dokažimo še naslednjo koristno trditev.

Trditev 1.3.1. *Če je $\mathcal{B}$ baza topologije v topološkem prostoru (E,τ) in je $A \subset E$, je družina*
$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$$
baza inducirane topologije τ_A v A.

Dokaz. Naj bo G poljubna odprta množica v E in naj bo $a \in G \cap A$. Po izreku 1.2.1 obstaja taka množica $U \in \mathcal{B}$, da velja $a \in U \subset G$. Tedaj velja $a \in U \cap A \subset G \cap A$. Po izreku 1.2.1 je tedaj $\mathcal{B}_A$ baza topologije τ_A na A.

$\square$

Vaje.

1. V topološkem prostoru (E, τ) imejmo podmnožici $A \subset B \subset E$. Dokažite, da za inducirane topologije velja $\tau_A = (\tau_B)_A$.

2. Naj bo (A, τ_A) podprostor v (E, τ). Dokažite, da je $B \subset A$ zaprta v relativni topologiji natanko tedaj, ko obstaja taka zaprta množica C v E, da je $B = C \cap A$.

3. Pokažite, da je običajna topologija v $\mathbb{R}$ ista kot topologija podprostora $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$ v $\mathbb{R}^2$ z evklidsko topologijo.

4. Naj bo $X = (-3, 0]$ s topologijo inducirano z $\mathbb{R}$. Ali je $(-1, 0]$ odprta množica v X? Ali je v X množica $(-3, -2]$ zaprta? Ali je v X množica $(-2, -1]$ odprta ali zaprta ali pa ni niti odprta niti zaprta?

5. Naj bo (A, τ_A) podprostor v (E, τ). Naj bo A odprta v E. Dokažite, da je tedaj vsaka množica $B \subset A$ odprta v A natanko tedaj, ko je odprta v E.

6. Naj bo (A, τ_A) podprostor v (E, τ). Naj bo A zaprta v E. Dokažite, da je tedaj vsaka množica $B \subset A$ zaprta v A natanko tedaj, ko je zaprta v E.

7. Kakšne so okolice točk v $\mathbb{Q}$ v inducirani topologiji iz $\mathbb{R}$? Kakšne pa so okolice v $\mathbb{N}$?

8. Dokažite, da je vsak podprostor Hausdorffovega topološkega prostora tudi Hausdorffov.

1.4 Zveznost

Definicija. Naj bosta (X, τ) in (Y, σ) topološka prostora. Za funkcijo $f \colon X \to Y$ iz množice X v množico Y rečemo, da je *zvezna* funkcija ali *preslikava* $f \colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, če je za vsak $U \in \sigma$ praslika $f^{-1}(U)$ v τ.

Torej so praslike odprtih množic pri preslikavah vselej odprte množice. Z zgornjo definicijo smo definirali »globalno« zveznost, zveznost funkcije v dani točki pa definiramo takole.

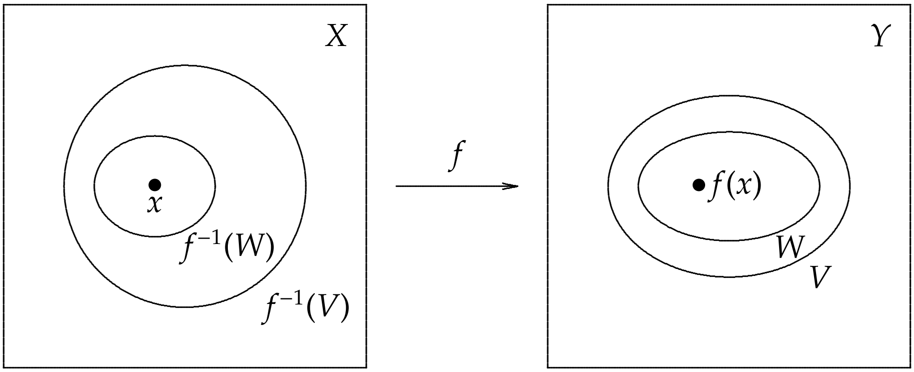
Definicija. Naj bosta (X, τ) in (Y, σ) topološka prostora. Za funkcijo $f \colon X \to Y$ rečemo, da je *zvezna v točki* $x \in X$, če je praslika $f^{-1}(V)$ poljubne okolice V točke $f(x)$ okolica točke x.

Izrek 1.4.1. *Funkcija $f \colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je zvezna natanko tedaj, ko je zvezna v vsaki točki $x \in X$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da zveznost implicira zveznost v vsaki točki. Naj bo $x \in X$ in naj bo V okolica točke $f(x)$. Obstaja torej neka odprta okolica $W \subset V$ točke $f(x)$. Ker je f zvezna, je $f^{-1}(W)$ odprta množica v X, ki vsebuje točko x. Ker je po konstrukciji $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$ je $f^{-1}(V)$ okolica točke x in je f res zvezna v točki x.

Pokažimo še obratno, da je funkcija, ki je zvezna v vsaki točki, zvezna. Naj bo $f \colon X \to Y$ funkcija, ki je v vsaki točki zvezna, V pa poljubna odprta množica v Y. Kakšna je tedaj $f^{-1}(V)$? Naj bo $x \in f^{-1}(V)$. Ker je f v x zvezna, je praslika vsake okolice W slike $f(x)$ okolica točke x. Ker je V odprta, je tudi okolica točke $f(x)$ in tako tudi njena praslika $f^{-1}(V)$ okolica točke x. Ker to velja za vsako točko $x \in f^{-1}(V)$, je $f^{-1}(V)$ okolica vsake svoje točke, torej je odprta množica v X.

$\square$



Slika 1.2. Zveznost v točki

Trditev 1.4.2. *Funkcija je zvezna natanko tedaj, ko je praslika vsake zaprte množice zaprta.*

Dokaz. Naj bo f zvezna preslikava iz (X, τ) v (Y, σ). Naj bo A zaprta množica v Y. Tedaj je $Y \setminus A$ odprta v Y in zaradi zveznosti tudi

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

odprta v X. Torej je $f^{-1}(A)$ zaprta v X.

Naj za $f\colon X \to Y$ velja, da je praslika vsake zaprte množice (glede na σ) zaprta (glede na τ) in pokažimo, da je tedaj f zvezna. Naj bo B poljubna odprta množica v Y. Ker je $Y \setminus B$ zaprta, je po predpostavki tudi

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

zaprta množica v X. To pa pomeni, da je $f^{-1}(B)$ odprta v X. Funkcija f je torej zvezna.

□

Primer. Iz zgornje trditve sledi, da je krivulja v $\mathbb{R}^2$, implicitno dana z enačbo $f(x,y)=0$, kjer je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, zaprta v $\mathbb{R}^2$, saj je enaka množici $f^{-1}(0)$.

◇

Dokažimo še naslednji koristni izrek.

Izrek 1.4.3. *Naj bo dana funkcija $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ in naj bo $X = A \cup B$, kjer sta bodisi A in B obe odprti bodisi obe zaprti množici. Če sta zožitvi $f|_A\colon A \to Y$ in $f|_B\colon B \to Y$ zvezni, je tudi f zvezna.*

Dokaz. Naj bosta najprej A in B obe odprti množici v X in naj bo C odprta množica v Y. Tedaj sta zaradi zveznosti $f|_A$ in $f|_B$ tudi $(f|_A)^{-1}(C)$ in $(f|_B)^{-1}(C)$ odprti množici v A oziroma v B in ker sta tudi ti dve odprti v X, sta tako tudi obe $(f|_A)^{-1}(C)$ in $(f|_B)^{-1}(C)$ odprti v X. Ker je $X = A \cup B$ in je

$$(f|_A)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A\,, \qquad (f|_B)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap B\,,$$

je $f^{-1}(C)$ unija odprtih množic

$$f^{-1}(C) = (f|_A)^{-1}(C) \cup (f|_B)^{-1}(C)$$

in je tako odprta množica. Torej je f zvezna.

Naj bosta zdaj A in B obe zaprti množici v X. Naj bo D zaprta množica v Y. Po trditvi 1.4.2 sta tedaj tudi $(f|_A)^{-1}(D)$ in $(f|_B)^{-1}(D)$ zaprti množici v A oziroma v B in ker sta A in B zaprti v X, sta tudi $(f|_A)^{-1}(D)$ in $(f|_B)^{-1}(D)$ obe zaprti v X. Tedaj pa je zaprta v X tudi njuna unija

$$(f|_A)^{-1}(D) \cup (f|_B)^{-1}(D) = f^{-1}(D)\,.$$

Po trditvi 1.4.2 je tedaj tudi f zvezna.

□

Vaje.

1. Dokažite, da se »naš« pojem zveznosti funkcije v točki ujema z ε - δ definicijo zveznosti za funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tj. funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki x_0, če za vsako število $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, če je $|x - x_0| < \delta$.

2. Dokažite, da je vsaka funkcija iz diskretnega topološkega prostora v poljubni topološki prostor zvezna. Dokažite tudi, da je vsaka funkcija iz poljubnega topološkega prostora v indiskretni prostor zvezna.

3. Dokažite, da je vsaka konstantna funkcija (tj. taka, ki preslika cel prostor v eno samo točko) zvezna, ne glede na topologiji v domeni in kodomeni.

4. Dokažite, da je kompozitum dveh zveznih funkcij tudi zvezna funkcija.

5. S protiprimerom pokažite, da trditev 1.4.3 ne velja, če dovolimo, da je A odprta, B pa zaprta množica. Namig: poskusite najti protiprimer med funkcijami $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Naj bo $f: X \to Y$ funkcija med topološkima prostoroma in naj bo $\mathcal{B}$ baza topologije v Y. Dokažite, da je f zvezna natanko tedaj, ko je praslika vsakega elementa iz $\mathcal{B}$ odprta množica v X.

7. S pomočjo prejšnje naloge pokažite, da so vse translacije in rotacije ravnine zvezne preslikave. (Namig: za bazo evklidske topologije v ravnini vzemite družino vseh odprtih krogov.)

8. Dokažite, da se »naša« definicija zveznosti funkcije v točki ujema z definicijo zveznosti med metričnimi prostori, tj. funkcija $f: X \to Y$ je zvezna v točki x_0, če za vsako število $\varepsilon > 0$

obstaja tako število $\delta > 0$, da velja $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, če je $d_X(x, x_0) < \delta$.

9. V množici E imejmo topologiji τ in σ. Pokažite, da je identiteta $\mathrm{id}\colon (E,\tau) \to (E,\sigma)$ zvezna natanko tedaj, ko je topologija τ finejša od topologije σ.

10. Naj bo $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ zvezna funkcija. Dokažite, da f ostane zvezna tudi, če zamenjamo topologijo τ s finejšo, topologijo σ pa z bolj grobo.

11. Naj bo $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ funkcija, ki ni zvezna. Dokažite, da f ne bo zvezna tudi, če zamenjamo topologijo τ z bolj grobo, topologijo σ pa s finejšo.

12. Poiščite najbolj grobo topologijo v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, za katero je projekcija na prvi faktor zvezna. Poiščite tudi najbolj grobo tako topologijo v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, da sta obe projekciji (na prvi in drugi faktor) zvezni.

13. Naj bo $A \subset X$ in $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava. Dokažite, da je tedaj tudi zožitev $f|_A\colon A \to Y$ zvezna preslikava.

14. Pokažite, da se da trditev 1.4.3 posplošiti na primer poljubne družine odprtih množic A_i, ki pokrivajo ves prostor X, tj.

$$X = \cup_i A_i\,.$$

Zakaj se ne da posplošiti tudi na primer poljubne družine zaprtih podmnožic, ki pokrivajo X? Kje dokaz odpove? Poizkusite najti protiprimer.

15. Poiščite tako topologijo v množici $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (to je množica naravnih števil, ki ji dodamo še eno točko ∞), da bo funkcija

$$f\colon \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna natanko tedaj, ko je

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = f(\infty)\,,$$

kjer je limita običajna limita, ki jo poznamo iz analize.

16. Pokažite, da slika Hausdorffovega prostora z zvezno preslikavo ni vedno Hausdorffov prostor.

    Nasvet: vzemite v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podmnožico

    $$B = [(\mathbb{R} - \{0\}) \times \{0\}] \cup \{(0;1)\} \cup \{(0;-1)\};$$

    tu pišemo točko v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s koordinatama x in y kot par $(x;y)$, da točko v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ razlikujemo od odprtih intervalov. Množico B opremite z naslednjo topologijo. Bazo topologije naj tvori družina odprtih intervalov $(x, y) \times \{0\}$, kjer je $(x, y) \subset \mathbb{R} - \{0\}$, skupaj z množicami oblike $(-\varepsilon, 0) \times \{0\} \cup \{(0;1)\} \cup (0, \varepsilon) \times \{0\}$ in $(-\varepsilon, 0) \times \{0\} \cup \{(0;-1)\} \cup (0, \varepsilon) \times \{0\}$. Pokažite, da B je topološki prostor, ki pa ni Hausdorffov. Za A vzemite podprostor v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ki je unija premic $\mathbb{R} \times \{1\}$ in $\mathbb{R} \times \{-1\}$. Poiščite zvezno surjekcijo A na B.

1.5 Homeomorfizem

Definicija. Funkciji $f\colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ rečemo *homeomorfizem*, če je zvezna, bijektivna in je tudi njen obrat f^{-1} zvezna funkcija.

Če med topološkima prostoroma obstaja kak homeomorfizem, rečemo, da sta ta dva topološka prostora *homeomorfna*.

Kot smo povedali že v uvodu je osnovni problem topologije, da za dana topološka prostora dokažemo ali sta homeomorfna ali ne. Homeomorfnost je namreč topološka ekvivalenca: topologija ne vidi razlike med homeomorfnima prostoroma. Lastnost L topoloških prostorov, ki jo homeomorfizmi ohranjajo, je *topološka lastnost* ali *topološka invarianta*. Če ima neki topološki prostor neko topološko lastnost, ima to lastnost tudi vsak homeomorfen prostor.

Primeri.

1. Funkcija $x \mapsto 2x$ je homeomorfizem iz $[0,1]$ v $[0,2]$, saj je bijekcija (njen inverz je $x \mapsto x/2$; ker je vsaka identiteta bijekcija, iz $fg = \mathrm{id}$ namreč sledi, da je f surjekcija, g pa injekcija, iz $gf = \mathrm{id}$ pa obratno) in ker je vsaka linearna funkcija zvezna, gre res za homeomorfizem.

2. Funkciji
$$\mathrm{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$
sta inverzna si homeomorfizma. Funkciji sta si namreč inverzni in obe sta zvezni, kot vemo že iz analize. Ker sta si funkciji inverzni (tj. $\mathrm{tg} \circ \mathrm{arctg} = \mathrm{id}$ in $\mathrm{arctg} \circ \mathrm{tg} = \mathrm{id}$), sta bijekciji.

3. Funkciji
$$f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
in
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)\,, \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
sta inverzna si homeomorfizma. Da gre za inverzni si funkciji pokaže kratek račun, zveznost sledi iz zveznosti osnovnih računskih operacij in zveznosti kompozitov. Interval $(-1,1)$ je torej homeomorfen množici vseh realnih števil $\mathbb{R}$.

$\diamond$

Več zanimivih primerov in protiprimerov bomo srečali še kasneje, ko bomo spoznali več topoloških lastnosti.

Trditev 1.5.1. *Naj bo $f: X \to Y$ homeomorfizem. Tedaj je za poljubno podmnožico A v X tudi »zožitev« $f_A: A \to f(A)$, $a \mapsto f(a)$, homeomorfizem (glede na inducirani topologiji v A oziroma $f(A)$).*

Dokaz. Očitno je tudi omenjena preslikava f_A bijekcija. Pokažimo, da je f_A zvezna. Naj bo $a \in A$. Po definiciji topologije podprostora je vsaka okolica točke $f(a)$ v $f(A)$ oblike $V \cap f(A)$, kjer je V neka okolica točke $f(a)$ v Y. Ker je f zvezna v a, za okolico $V \subset Y$ točke $f(a)$ najdemo okolico $U \subset X$ točke a, da je $f(U) \subset V$. Tedaj pa za okolico $U \cap A$ točke a v A velja $f_A(U \cap A) \subset V \cap f(A)$ in je zato f_A zvezna v a.

Iz istega razloga je zvezen tudi njen inverz $(f_A)^{-1} = f^{-1}_{f(A)}$. □

Pozor! Medtem, ko pri algebri velja, da je homomorfizem, ki je bijektiven, tudi izomorfizem, pa zvezna obrnljiva preslikava ni nujno homeomorfizem. Obstajajo preslikave, ki so bijektivne, njih obrat pa ni zvezen. Primer take preslikave je

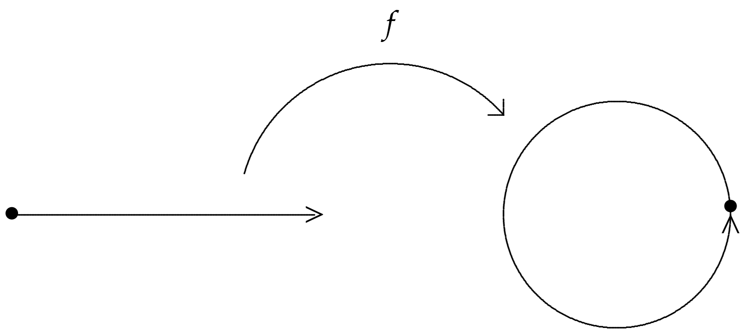
$$f: [0, 2\pi) \to S^1, \quad f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(Spomnimo se, da je $S^1 = \{e^{it}; 0 \leq t < 2\pi\}$.)

Definiciji. Naj bosta (X, τ) in (Y, σ) topološka prostora. Funkciji $f: X \to Y$, ki preslika vse odprte množice v odprte množice, rečemo *odprta funkcija* ali, če je f zvezna, *odprta preslikava*.

Funkciji $f: X \to Y$, ki preslika vse zaprte množice v zaprte množice, rečemo *zaprta funkcija* ali, če je f zvezna, *zaprta preslikava*.

Zgoraj omenjena funkcija $f: [0, 2\pi) \to S^1$, $f(x) = e^{ix}$ je zvezna, ni pa tudi odprta: intervali $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon < 2\pi$, so vsi odprti v $[0, 2\pi)$, njihova



Slika 1.3. Preslikava iz intervala na krožnico

slika s preslikavo f pa ni odprta v S^1. Prav tako ta preslikava ni zaprta: intervali $[\varepsilon, 2\pi)$ so zaprti v $[0, 2\pi)$, njihova slika pa ni zaprta v S^1.

Dokažimo naslednjo koristno trditev.

Trditev 1.5.2. *Naj bo $f\colon X \to Y$ bijektivna odprta funkcija. Tedaj je $f^{-1}\colon Y \to X$ zvezna preslikava. Če je f tudi zvezna, je f homeomorfizem.*

Analogno velja za zaprte funkcije: če je $f\colon X \to Y$ zaprta bijekcija, je f^{-1} zvezna preslikava; če je f še zvezna, je homeomorfizem.

Dokaz. Dokažimo le prvo trditev. Funkcija $f^{-1}\colon Y \to X$ je po definiciji zvezna, če je praslika $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ poljubne odprte množice U v X odprta v Y. To pa je v našem primeru res, saj je f po predpostavki odprta funkcija.

□

Vaje.

1. Dokažite, da je homeomorfnost topoloških prostorov ekvivalenčna relacija.

2. Poiščite kakšen homeomorfizem med $(0,1)$ in $(-1,1)$.

3. Poiščite kakšen homeomorfizem med $(0,1)$ in $\mathbb{R}$.

4. Pokažite, da so vsi zaprti in omejeni intervali med seboj homeomorfni in da so tudi vsi odprti intervali med seboj homeomorfni.

5. Pokažite, da so si vse krožnice v $\mathbb{R}^2$ homeomorfne in da so vse 2-sfere v $\mathbb{R}^3$ homeomorfne.

6. Naj bo $B^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Dokažite, da sta funkciji

$$f\colon \operatorname{int} B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

in

$$g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \operatorname{int} B^n, \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}$$

inverzna si homeomorfizma.

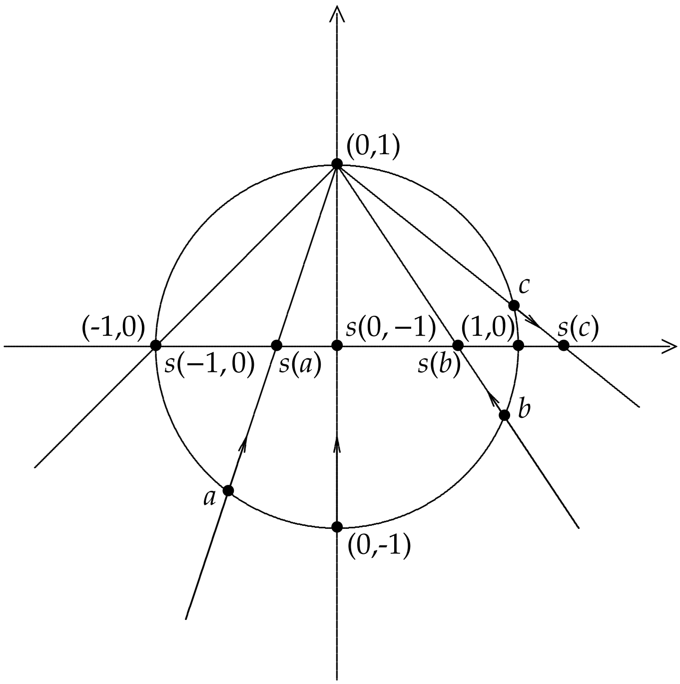
7. Naj bo $S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$. Dokažite, da sta funkciji

$$\begin{aligned} s\colon S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{\|x\|^2 + 1}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

inverzna si homeomorfizma. Funkciji s rečemo *stereografska projekcija*.



Slika 1.4. Stereografska projekcija

8. Dokažite, da kvadratna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ni odprta preslikava, je pa zaprta. (Namig: kam se preslikajo intervali $(-a, a)$?)

9. Dokažite, da je projekcija $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na prvi faktor preslikava, ki je odprta, ni pa zaprta. (Namig: za odprtost izrazite poljubno odprto množico v ravnini kot unijo odprtih krogel; za protiprimer zaprtosti pa poglejte v kaj se preslika krivulja $y = x^{-1}$.)

1.6 Povezanost

Povezanost je ena najbolj nazornih topoloških lastnosti. Poleg povezanosti si bomo tu ogledali tudi povezanost s potmi in lokalno povezanost.

Definicije. Množici A in B v topološkem prostoru (E, τ) tvorita *separacijo* tega prostora, če sta A in B odprti, neprazni množici, za kateri velja

$$E = A \cup B, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

Prostor (E, τ) je *povezan*, če ne dopušča nobene separacije, tj. če sta $\emptyset$ in E edini podmnožici v E, ki sta hkrati odprti in zaprti.

Množici X v prostoru E rečemo *povezana množica*, če je X skupaj s topologijo, ki jo inducira E, povezan topološki prostor.

Ker homeomorfizem preslika odprte množice v odprte in zaprte v zaprte, ohranja (ne)povezanost in je zato povezanost res topološka lastnost.

Primeri.

1. Vsi intervali v $\mathbb{R}$ so povezani topološki prostori in tako tudi povezane množice v $\mathbb{R}$, kot bomo pokazali v naslednjem izreku.

2. Unija intervalov, ki ni interval, ni povezana. Konkretni primer je $[0, 1) \cup (1, 2)$, saj sta oba intervala v tej uniji odprti in hkrati tudi zaprti množici.

3. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ ni povezana množica v $\mathbb{R}$, prav tako tudi množica $\mathbb{Q}$ racionalnih števil.

4. Krožnica je povezan prostor (to sledi iz trditev 1.6.1 in 1.6.5, ki jih bomo dokazali kasneje) in četudi ji odvzamemo kakšno

točko ostane povezan prostor. Tudi cifra 8 je tudi povezan prostor (tudi to sledi iz omenjenih izrekov), a če ji odvzamemo neko točko (katero?) postane nepovezan prostor. Odtod lahko zaradi trditve 1.5.1 sklepamo na to, da krožnica in osmica nista homeomorfna prostora.

◇

Izrek 1.6.1. *Edine povezane množice v $\mathbb{R}$, ki imajo več kot eno točko, so intervali (ki so lahko tudi neomejeni).*

Dokaz. Naj bo $X \subset \mathbb{R}$ povezana množica. Denimo, da X ni interval. Tedaj obstajajo take točke $a, b \in X$, $c \notin X$, da velja $a < c < b$. V tem primeru lahko zapišemo

$$X = (X \cap \{x \in \mathbb{R}; x < c\}) \cup (X \cap \{x \in \mathbb{R}; x > c\}),$$

kar je razcep množice X na dve disjunktni podmnožici, ki sta odprti v X. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je X povezana množica.

Naj bo X interval in dokažimo, da je X povezana množica. Denimo nasprotno, da za X obstaja separacija $X = A \cup B$, kjer sta A in B neprazni, odprti množici s praznim presekom. Izberimo $a \in A$ in $b \in B$. Lahko privzamemo, da je $a < b$, sicer zamenjamo oznake. Točka $\alpha = \sup\{x \in A; x < b\}$ leži na intervalu $[a, b]$, zato je $\alpha \in X$. Če je $\alpha \in A$, potem je $(\alpha, b] \subset B$, zato vsaka okolica točke α seka B in je α v ∂A. Če pa je $\alpha \in B$, potem zaradi lastnosti supremuma vsaka okolica točke α seka A, zato je spet $\alpha \in \partial A$. V obeh primerih dobimo protislovje s privzetkom, da je A odprta množica, torej ne vsebuje svojih robnih točk.

□

Definicija. Naj bo E topološki prostor. Povezanim podmnožicam tega prostora, ki so maksimalne glede na relacijo inkluzije, rečemo tudi *komponente* (za povezanost, ali tudi povezanostne komponente).

Ali je povezanost dedna lastnost? Ni, kajti v povezanem prostoru $\mathbb{R}$ imamo nepovezane podmnožice, npr. $(-1,0) \cup (1,2)$.

Pokažimo, da preslikave ohranjajo povezanost.

Izrek 1.6.2. *Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava povezanega topološkega prostora X v topološki prostor Y. Tedaj je $f(X)$ povezana množica v Y.*

Dokaz. Pa recimo, da temu ni tako. Tedaj za neki povezan prostor X in neko preslikavo $f\colon X \to Y$ prostor $f(X)$ ni povezan. To pomeni, da za $f(X)$ obstaja separacija $f(X) = A \cup B$. Zaradi zveznosti preslikave f sta tedaj tudi $f^{-1}(A)$ in $f^{-1}(B)$ odprti množici v X, od katerih seveda nobena ni prazna, njun presek je prazen, njuna unija pa X, torej tvorita separacijo za X. To pa je v protislovju s predpostavko, da je X povezan prostor.

□

S posebnim primerom zgornjega izreka smo se že srečali pri analizi, kjer smo ugotovili, da zavzame zvezna funkcija iz intervala v $\mathbb{R}$, ki zavzame vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$, tudi vse vrednosti med a in b.

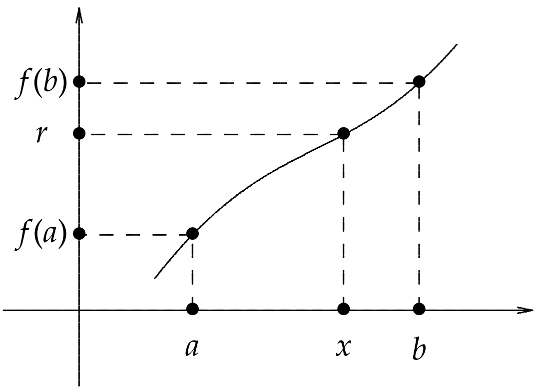
Izrek 1.6.3. (Izrek o vmesni vrednosti.) *Naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija povezane množice X v $\mathbb{R}$. Če sta a in b dve točki v X in je $r \in \mathbb{R}$ tako realno število, da velja*

$$f(a) < r < f(b),$$

obstaja taka točka $x \in X$, da je $f(x) = r$.

Dokaz. Ker je X povezana množica, f pa zvezna funkcija, je po izreku 1.6.2 tudi $f(X)$ povezana množica in zato po izreku 1.6.1 interval. To pa pomeni, da velja $[f(a), f(b)] \subset f(X)$.

□



Slika 1.5. Vmesna vrednost

Trditev 1.6.4. *Naj množici C in D tvorita separacijo topološkega prostora X in naj bo Y povezana množica v X. Tedaj je ali $Y \subset C$ ali $Y \subset D$.*

Dokaz. Ker sta C in D odprti in zaprti množici, sta $C \cap Y$ in $D \cap Y$ taki odprti in zaprti množici v Y, da je njuna unija Y. Ker je Y povezana, je eden od zgornjih presekov prazen in dobimo zgornjo trditev.

□

Izrek 1.6.5. *Imejmo tako družino povezanih množic, da je njen presek neprazen. Tedaj je tudi unija te družine povezana množica.*

Dokaz. Naj bo $\{A_i\}$ družina povezanih množic v topološkem prostoru X in naj bo $p \in \bigcap_i A_i$. Denimo, da $Y = \bigcup_i A_i$ ni povezana množica. Potem je $Y = C \cup D$, kjer sta C in D v Y neprazni, odprti in zaprti množici. Recimo, da je $p \in C$. Ker je A_i povezana množica, mora po zgornji trditvi ležati ali v C ali v D. Ker pa $p \in A_i$, je $A_i \subset C$ in to velja za vsak i. To pa pomeni $Y \subset C$, kar je v protislovju s predpostavko, da D ni prazna množica.

$\square$

Poglejmo si še en pojem povezanosti, to je povezanost s potmi.

Definicije. *Pot* v prostoru X je zvezna preslikava $f\colon[0,1] \to X$. Točki $f(0)$ rečemo *začetna točka* poti f, točki $f(1)$ pa *končna točka* poti f.

Prostoru X pravimo *s potmi povezan*, če za poljubni točki $x_0, x_1 \in X$ obstaja taka pot f v prostoru X, da je $f(0) = x_0$ in $f(1) = x_1$.

Primeri.

1. Prostor $\mathbb{R}$ je s potmi povezan: za poljubni točki $a, b \in \mathbb{R}$ najdemo pot, na primer $f\colon I = [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = (1-t)a + tb$, ki se začne v a in konča v b.

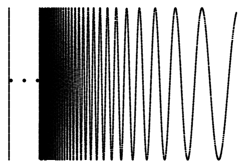
2. Podobno kot zgoraj lahko pokažemo, da je vsak evklidski prostor $\mathbb{R}^n$ s potmi povezan.

3. Enotska krožnica S^1 v ravnini je s potmi povezan prostor: pišimo njene točke kot e^{it}, kjer je $t \in [0, 2\pi)$; točki e^{ia} in e^{ib} lahko tedaj povežemo s potjo $f(t) = e^{i(1-t)a+itb}$.

$\diamond$

Pokažimo, da je povezanost s potmi strožja zahteva od povezanosti. To je pomembno dejstvo, saj za marsikakšen prostor ni težko pokazati, da je s potmi povezan.

Izrek 1.6.6. *Vsak s potmi povezan prostor je tudi povezan.*



Slika 1.6. Graf funkcije $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

Dokaz. Naj bo X s potmi povezan prostor in denimo, da ni povezan prostor. Tedaj obstaja neka separacija $A \cup B = X$. Za poljubni točki $a \in A$ in $b \in B$ obstaja taka pot $f\colon I \to X$, da je $f(0) = a$ in $f(1) = b$. Tedaj tvorita množici $A \cap f(I)$ in $B \cap f(I)$ separacijo za povezano množico $f(I)$. To pa je protislovje.

$\square$

Tu le omenimo, da ne velja obrat zgornjega izreka. Če je prostor povezan, še ni rečeno, da je tudi s potmi povezan. Protiprimer je topološka sinusna krivulja

$$X = (\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x, \sin 1/x); 0 < x \leq 1\}$$

v ravnini $\mathbb{R}^2$, v njej ne moremo povezati s potmi točk iz $\{0\} \times [0,1]$ s točkami na $\{(x, \sin 1/x)\}$, je pa povezan prostor. Krivulja

$$\{(x, \sin 1/x); 0 < x \leq 1\}$$

je zvezna slika intervala, torej je povezana. Njeno zaprtje v X, ki je kar cel prostor X, je torej tudi povezan prostor.

S povezanostjo si lahko pomagamo tudi pri vprašanju homeomorfnosti topoloških prostorov, najpogosteje tako, da z (ne)povezanostjo kakšnih množic pokažemo, da si dva prostora nista homeomorfna.

S tem smo zaenkrat končali z globalnim aspektom povezanosti. Oglejmo si še lokalno povezanost.

Definicija. Prostor E je *lokalno povezan*, če ima kakšno bazo topologije, ki jo sestavljajo povezane množice.

Primeri.

1. Vsi intervali realnih števil so lokalno povezani topološki prostori.
2. Unija dveh intervalov je lokalno povezan prostor.
3. Množica celih števil je lokalno povezana množica v $\mathbb{R}$.
4. Množica ulomkov $\mathbb{Q}$ ni lokalno povezana množica v $\mathbb{R}$. Ker med poljubnima ulomkoma obstaja iracionalno število, ni težko pokazati, da so točke edine povezane množice v $\mathbb{Q}$. Točke pa ne sestavljajo baze topologije za $\mathbb{Q}$, ker topologija v $\mathbb{Q}$ ni diskretna.

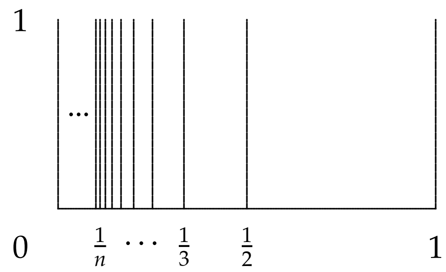
$\diamond$

Primera 2 in 3 povesta, da je prostor lahko lokalno povezan, čeprav ni povezan. Velja pa tudi obratno: obstajajo prostori, ki so povezani, pa niso lokalno povezani.

Primer. V $\mathbb{R}^2$ si oglejmo podprostor, ki mu rečemo *glavnik*. (Glej sliko 1.7 na sosednji strani!) To je unija

$$[0,1]\times\{0\} \quad \bigcup \quad \{\{1/n\}; n\in\mathbb{N}\}\times[0,1] \quad \bigcup \quad \{0\}\times[0,1]\,.$$

Ta prostor je povezan, ni pa lokalno povezan. Vse dovolj majhne okolice točke $(0,1)$ v glavniku so nepovezane, to pa pomeni, da ne



Slika 1.7. Glavnik

obstaja taka baza topologije, ki bi bila sestavljena iz samih povezanih množic.

◇

Vaje.

1. Naj bo E povezan diskretni topološki prostor. Koliko točk lahko ima?

2. Naj bo A povezana množica v topološkem prostoru E. Naj za množico B v E velja
$$A \subset B \subset \bar{A}\,.$$
Dokažite, da je potem tudi B povezana množica.

3. Dokažite, da so povezanostne komponente zaprte množice. Ali so tudi odprte? (Namig: Kaj so komponente množice $\{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ v $\mathbb{R}$?)

4. Naj bo X povezan topološki prostor. Ali obstaja zvezna surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$, kjer je $Y = \{0, 1\}$ z diskretno topologijo?

5. Pokažite, da je enotska sfera S^2 v prostoru $\mathbb{R}^3$ s potmi povezan prostor.

6. Pokažite, da je enotska sfera S^{n-1} v $\mathbb{R}^n$ s potmi povezan prostor.

7. Pokažite, da je vsaka konveksna množica v $\mathbb{R}^n$ povezana s potmi.

8. Naj bo A_t, $t \in T$, taka družina s potmi povezanih množic v prostoru E, da je $\cap_T A_t \neq \emptyset$. Dokažite, da je unija $\cup_T A_t$ s potmi povezan prostor.

9. Naj bo $f\colon [0,1] \to X$ pot od a do b in $g\colon [0,1] \to X$ pot od b do c. Dokažite, da je $f \cdot g\colon [0,1] \to X$, definirana s predpisom

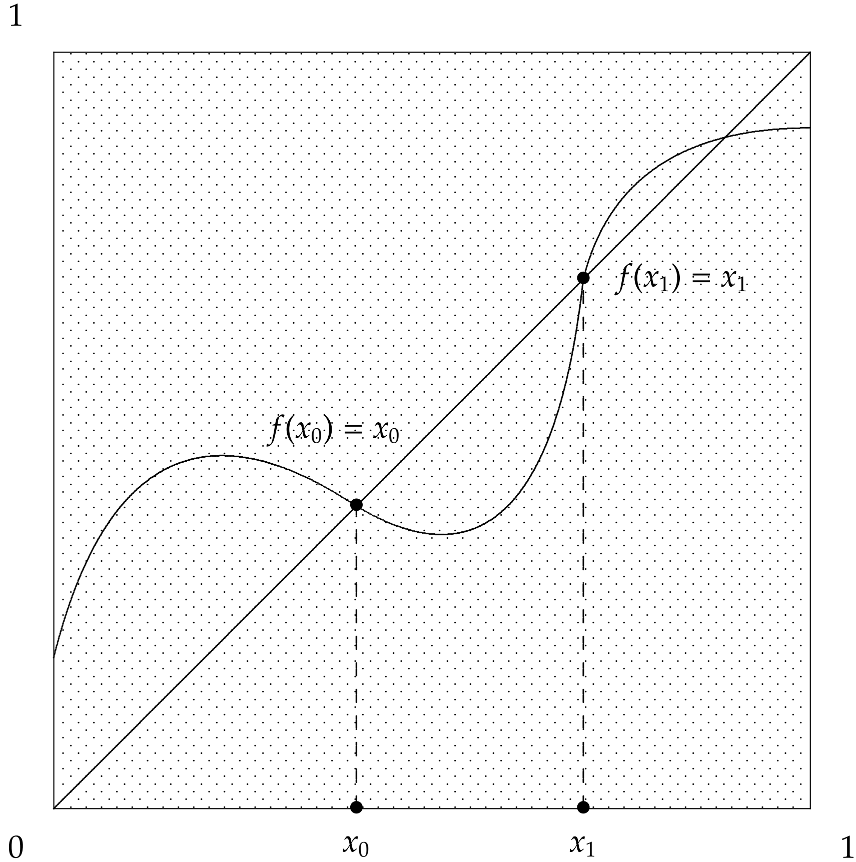
$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} f(2t), & \text{če } t \in [0,1/2], \\ g(2t-1), & \text{če } t \in [1/2,1], \end{cases}$$

   pot v X od a do c.

10. Dokažite takle izrek o negibni točki: za vsako zvezno preslikavo $f\colon [0,1] \to [0,1]$ obstaja taka točka $x_0 \in [0,1]$, da je $f(x_0) = x_0$.

    (Namig: Za funkcijo $g(x) = x - f(x)$ uporabite izrek o vmesni vrednosti 1.6.3.)

11. Dokažite naslednji izrek: za vsako zvezno preslikavo $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ obstaja par antipodnih točk $\{x, -x\} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ki se s preslikavo f preslikata v isto točko. (To je posebni primer Borsuk-Ulamovega izreka, ki trdi, da poljubna zvezna preslikava $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ preslika vsaj en par antipodnih točk v isto točko.)



Slika 1.8. Obstoj negibne točke

(Namig: Definirajte preslikavo $g\colon B^n \to S^n$, kjer je B^n enotska krogla v $\mathbb{R}^n$, s predpisom

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots x_n^2)})$$

in preslikavo $h\colon B^n \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$h(v) = f(g(v)) - f(-g(v)), \qquad v \in B^n .$$

Poglejte, kakšna zveza velja med $h(1, 0, \ldots, 0)$ in $h(-1, 0, \ldots, 0)$ in uporabite izrek o vmesni vrednosti.)

12. Pokažite, da $\mathbb{R}$ ni homeomorfen nobenemu evklidskemu prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n > 1$. (Namig: Recimo, da imamo tak homeomorfizem. Tedaj dobimo tudi homeomorfizem med $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, kjer je $x \in \mathbb{R}$ in $y \in \mathbb{R}^n$. Da pridete do protislovja, pokažite, da $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ni povezan, $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ pa je povezan s potmi.)

13. Razvrstite cifre od 0 do 9 v homeomorfnostne razrede.

14. Razvrstite črke slovenske abecede v homeomorfnostne razrede.

15. Dokažite, da je topološki prostor, ki je povezan in lokalno s potmi povezan (tj. vsaka točka ima bazo okolic, ki je s potmi povezana), tudi (globalno) s potmi povezan.

1.7 Kompaktnost

Kompaktnost je lastnost topoloških prostorov, ki je v nekem smislu analogna lastnosti končnosti v teoriji množic.

Definicije. Družini množic $\mathcal{U} = \{U_t; t \in J\}$ v topološkem prostoru E rečemo *pokritje*, če je njena unija cel prostor:

$$E = \bigcup_{t \in J} U_t .$$

Pokritju, ki ga sestavljajo odprte množice, rečemo *odprto pokritje*; pokritju, ki ga sestavljajo zaprte množice, rečemo *zaprto pokritje*; pokritju, ki ga sestavlja končno mnogo množic, rečemo *končno pokritje*; če je pokritje tako, da ima vsaka točka prostora neko okolico, ki seka le končno mnogo članov pokritja, mu rečemo *lokalno končno pokritje*.

Pokritju $\mathcal{B}$, ki ga sestavlja poddružina pokritja $\mathcal{U}$, rečemo *podpokritje* pokritja $\mathcal{U}$.

Primeri.

1. Družina intervalov (m,n), $m,n \in \mathbb{Z}$, $n > m$, je odprto pokritje prostora $\mathbb{R}$.

2. Družina vseh evklidskih metričnih krogel $K(0,m)$ s središčem 0 in polmeri $m \in \mathbb{N}$, tvori odprto pokritje prostora $\mathbb{R}^n$.

3. Za poljubni topološki prostor E je družina $\{\emptyset, E\}$ odprto pokritje prostora E.

4. Odprto pokritje $\mathcal{B} = \{(p,q); p,q \in \mathbb{Q}\}$ prostora $\mathbb{R}$ je podpokritje odprtega pokritja $\mathcal{U} = \{(a,b); a,b \in \mathbb{R}\}$ za $\mathbb{R}$.

$\diamond$

Definicija. Topološki prostor je *kompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno končno podpokritje.

Primeri.

1. Diskretni prostor je kompakten natanko tedaj, ko je končen, tj. ko ga sestavlja končno število točk.

2. Realna os ni kompakten prostor. Družina intervalov $(-n, n)$ je namreč odprto pokritje za $\mathbb{R}$, ki pa nima končnega podpokritja. Podobno pokažemo, da tudi $\mathbb{R}^m$ ni kompakten prostor.

$\diamond$

Trditev 1.7.1. *Vsak zaprt in omejen interval* $[a, b]$ *je kompakten.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U} = \{U_t; t \in J\}$ poljubno odprto pokritje intervala $[a, b]$. Naj bo C množica

$$C = \{x \in \mathbb{R}\,;\; x \leq b \text{ in } [a, x] \text{ se da pokriti s končno mnogimi } U_t\}\,.$$

Ta množica je navzgor omejena in ni prazna, saj je $a \in C$. Zato obstaja njen supremum, imenujmo ga c. Če nam uspe pokazati, da je $c = b$, s tem dokažemo, da je $[a, b]$ kompakten prostor.

Recimo, da $c \neq b$. V tem primeru izberimo poljubno tako množico $U_s \in \mathcal{U}$, ki vsebuje točko c.

Recimo, da je $c = a$, tedaj iz odprtosti množice U_s sledi, da je nek interval $[a, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, vsebovan v U_s in se tudi $[a, a + \varepsilon/2]$ da pokriti s končno (celo kar z enim!) elementom iz $\mathcal{U}$. To je v protislovju s predpostavko $c = a$.

Naj bo zdaj $a < c < b$. Ker je U_s odprta množica obstaja neki interval

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_s\,.$$

Tedaj pa je tudi $c+\varepsilon/2$ tako število v $[a, b]$, da se da interval $[a, c+\varepsilon/2]$ pokriti s končno mnogimi elementi iz $\mathcal{U}$. To pa je v protislovju z definicijo števila c. Torej je $c = b$.

Pokazali smo, da ima vsako odprto pokritje intervala $[a, b]$ končno podpokritje in je tako $[a, b]$ kompakten prostor.

$\square$

Nasploh ni lahko določiti ali je dani topološki prostor kompakten ali ne. Pokazali bomo, kako iz danih kompaktnih prostorov konstruiramo nove kompaktne prostore, potem pa bomo za nekatere posebne prostore dokazali, da so kompaktni. Najprej pa povežimo pojma kompaktnega prostora in kompaktne množice v nekem topološkem prostoru.

Definicije. Za podmnožico Y topološkega prostora (X, τ) rečemo, da je *kompaktna*, če je podprostor (Y, τ_Y) kompakten.

Za družino odprtih množic v X, katerih unija vsebuje podmnožico Y v X, rečemo, da *pokrije* podmnožico Y ali da je *odprto pokritje* podmnožice Y.

Trditev 1.7.2. *Naj bo Y podmnožica v topološkem prostoru X. Tedaj je Y kompaktna množica natanko tedaj, ko vsako odprto pokritje podmnožice Y vsebuje tako končno poddružino, ki pokrije Y.*

Dokaz. Naj bo Y kompaktna množica, $\mathcal{U} = \{U_j \subset X; j \in J\}$ pa poljubno odprto pokritje množice Y. Tedaj je družina

$$\{U_j \cap Y; j \in J\}$$

odprto pokritje prostora (Y, τ_Y). Ker je (Y, τ_Y) kompakten prostor, že končno število takih množic

$$\{U_{j_1} \cap Y, \ldots, U_{j_k} \cap Y\}$$

pokrije Y. Tedaj je $\{U_{j_1}, \ldots, U_{j_k}\}$ taka poddružina v $\mathcal{U}$, ki pokrije Y.

Za dokaz obratne trditve privzemimo, da vsako odprto pokritje podmnožice Y vsebuje tako končno poddružino, ki pokrije Y in dokažimo, da je Y kompaktna množica. Naj bo $\mathcal{V} = \{V_k; k \in K\}$ poljubno odprto pokritje prostora (Y, τ_Y). Za vsak $k \in K$ izberimo neko tako odprto množico U_k, da velja

$$V_k = U_k \cap Y \, ;$$

taka množica obstaja, ker je (Y, τ_Y) topološki podprostor prostora X. Družina $\mathcal{U} = \{U_k; k \in K\}$ je odprto pokritje podmnožice Y. Po predpostavki vsebuje končno poddružino $\{U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}\}$, ki pokrije Y. Tedaj pa je tudi $\{V_{k_1}, \ldots, V_{k_n}\}$ končno podpokritje pokritja $\mathcal{V}$.

□

Torej je vsak interval $[a, b]$ kompaktna množica v $\mathbb{R}$, iz analize vemo še več: v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko vsaka zaprta in omejena množica (Heine-Borel-Lebesguov izrek). To bomo tudi dokazali v naslednjem poglavju, ki ga bomo v celoti posvetili kompaktnim prostorom (in množicam).

Trditev 1.7.3. *Vsaka zaprta množica v kompaktnem prostoru je kompaktna.*

Dokaz. Naj bo Y zaprta množica v kompaktnem prostoru X in naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje množice Y. Iz pokritja $\mathcal{U}$ za Y naredimo odprto pokritje $\mathcal{V}$ prostora X tako, da k $\mathcal{U}$ dodamo še odprto množico $X \setminus Y$. Ker je X kompakten prostor, obstaja neko končno podpokritje pokritja $\mathcal{V}$. To pa pomeni, da tudi že končno mnogo elementov iz $\mathcal{U}$ pokrije Y.

□

Izrek 1.7.4. *Vsaka kompaktna množica v Hausdorffovem prostoru je zaprta.*

Dokaz. Naj bo Y kompaktna množica v Hausdorffovem prostoru X. Pokazali bomo, da je $X \setminus Y$ odprta množica. To bomo naredili tako, da bomo pokazali, da ima vsaka točka $x_0 \in X \setminus Y$ okolico, ki ne seka Y.

Ker je prostor X Hausdorffov, za poljubno točko $y \in Y$ obstajata taka odprta okolica U_y točke y in taka odprta okolica V_y točke x_0, da

velja
$$U_y \cap V_y = \emptyset\,.$$
(Pozor! Tu smo dali okolici točke x_0 indeks y zato, ker je ta okolica v splošnem odvisna od točke y, čeprav ni okolica točke y ampak x_0.)

Vse te odprte okolice U_y vseh točk $y \in Y$ tvorijo odprto pokritje podmnožice Y. Ker je Y kompaktna množica, že neka končna poddružina
$$\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_k}\}$$
od $\{U_y; y \in Y\}$ pokrije Y. Tedaj pa je presek
$$V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_k}$$
okolica točke $x_0 \in X \setminus Y$, ki ne seka Y. Ker smo to pokazali za poljubno točko $x_0 \in X \setminus Y$, to pomeni, da je $X \setminus Y$ odprta množica in je zato Y zaprta množica.

□

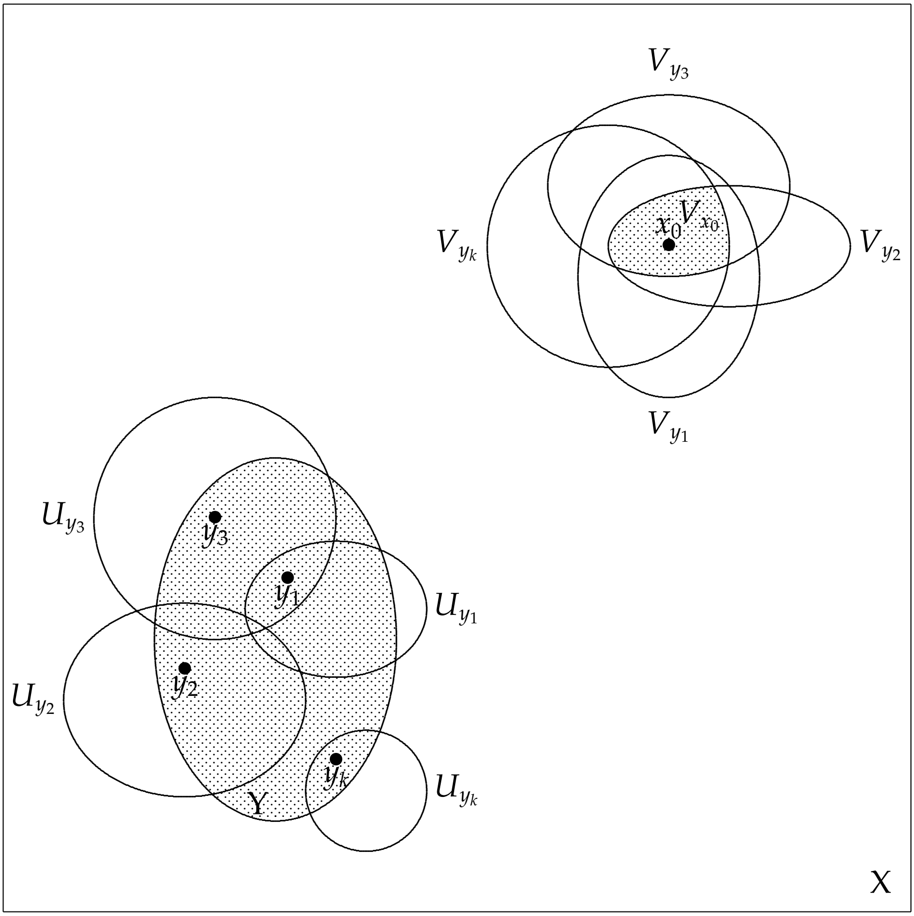
Naslednja trditev je pravzaprav posledica zgornjega dokaza (tj. tam smo jo že dokazali) in ne izreka.

Posledica 1.7.5. *Če je Y kompaktna množica v Hausdorffovem prostoru X in je $x \in X \setminus Y$, obstajata taki odprti množici U in V v X, da je*
$$Y \subset U\,, \qquad x \in V\,, \qquad U \cap V = \emptyset\,.$$

Dokažimo tale pomemben izrek.

Izrek 1.7.6. *Zvezna slika kompaktnega prostora je kompaktna.*

Dokaz. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava in X kompakten prostor. Trdimo, da je tedaj tudi $f(X) \subset Y$ kompaktna množica v Y.



Slika 1.9. Kompaktna množica v Hausdorffovem prostoru je zaprta

Za vsako odprto pokritje $\{G_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ slike $f(X)$ sestavljajo praslike $f^{-1}(G_\lambda)$ odprto pokritje prostora X. Ker je X kompakten, ga pokrije že končno mnogo takih odprtih množic.

$$X = f^{-1}(G_{\lambda_1}) \cup f^{-1}(G_{\lambda_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(G_{\lambda_k})$$

Tedaj pa je tudi

$$f(X) = G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \cdots \cup G_{\lambda_k}$$

in ker to velja za poljubno odprto pokritje množice $f(X)$, je le-ta kompaktna.

□

Posledica 1.7.7. *Vsaka krivulja $r(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, je kompaktna. Poseben primer: krožnica S^1 je kompaktna.*

Naslednji izrek se zelo pogosto uporablja pri dokazovanju homeomorfnosti.

Izrek 1.7.8. *Naj bo $f\colon X \to Y$ bijektivna zvezna preslikava. Če je X kompakten, Y pa Hausdorffov prostor, je f homeomorfizem.*

Dokaz. Zveznost inverzne funkcije f^{-1} bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da je za poljubno zaprto množico $F \subset X$ praslika $(f^{-1})^{-1}(F)$ zaprta v Y.

Ker je F zaprta množica v X in ker je X kompakten, je tudi F kompaktna množica. Ker sta f in f^{-1} bijekciji, je praslika od F glede na funkcijo f^{-1}, tj. $(f^{-1})^{-1}(F)$ enaka $f(F)$, ki je po trditvi 1.7.6 kompaktna in zato po trditvi 1.7.4 zaprta.

□

Vaje.

1. Pokažite, da je kompaktnost topološka lastnost.
2. Pokažite, da odprti interval $(0, 1)$ ni kompakten topološki prostor.
3. Dokažite, da je vsaka končna množica v poljubnem topološkem prostoru kompaktna.
4. Dokažite, da je unija končno mnogih kompaktnih množic v poljubnem topološkem prostoru kompaktna.
5. Dokažite, da je v poljubnem topološkem prostoru presek kompaktne in zaprte množice kompaktna množica.
6. Dokažite, da je v kompaktnem Hausdorffovem prostoru množica kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta.
7. Ali obstaja zvezna surjektivna preslikava iz intervala $[0, 1]$ na $\mathbb{R}$?

1.8 Separabilnost

Definicija. Če za množico A v topološkem prostoru E velja

$$\bar{A} = E\,.$$

rečemo, da je A *gosta* v E.

Primer. Preprost (a pomemben) primer je množica ulomkov $\mathbb{Q}$, ki je gosta v množici realnih števil $\mathbb{R}$ z običajno topologijo.

◇

Definicija. Kompaktnemu topološkemu prostoru (Y, σ) rečemo *kompaktifikacija* topološkega prostora (X, τ), če je (X, τ) homeomorfen kakšni gosti podmnožici v Y (glede na inducirano topologijo).

Primeri.

1. Krožnica S^1 je kompaktifikacija realne osi $\mathbb{R}$ z eno točko: stereografska projekcija je namreč homeomorfizem med krožnico brez ene točke (severnega pola) in $\mathbb{R}$.
2. Stereografska projekcija v poljubni dimenziji n je homeomorfizem med S^n brez »severnega pola« in evklidskim prostorom $\mathbb{R}^n$; torej je sfera S^n kompaktifikacija (z eno točko) evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$.
3. Interval $[0, 1]$ je kompaktifikacija prostora $\mathbb{R}$ (z dvema točkama), saj je njegova notranjost $(0, 1)$ homeomorfna $\mathbb{R}$.

$\diamond$

Definicija. Za topološki prostor rečemo, da je *separabilen*, če v njem obstaja kakšna števna gosta podmnožica.

Primeri.

1. $\mathbb{R}$ je separabilen prostor, saj je $\mathbb{Q}$, ki je v njem gosta podmnožica, števna.
2. Podobno je tudi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ separabilen prostor, saj je tudi $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gosta števna množica v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$\diamond$

Izrek 1.8.1. *Vsak kompakten metrični prostor je separabilen.*

Dokaz. Naj bo X kompakten metrični prostor. Poiskati moramo števno gosto množico v X.

Naredimo odprto pokritje

$$\mathcal{U}_1 = \{K(x,1); x \in X\}$$

prostora X, kjer $K(x,1)$ pomeni metrično kroglo z radijem 1 in središčem x. Ker je X kompakten, obstaja končno podpokritje pokritja $\mathcal{U}$. To pa pomeni, da obstaja končna množica

$$D_1 = \{x_1^1, \dots, x_{k(1)}^1\}$$

takih točk , da krogle z radijem 1 in središči v teh točkah pokrijejo ves prostor X.

V naslednjem koraku naredimo odprto pokritje

$$\mathcal{U}_2 = \{K(x,1/2); x \in X\}$$

prostora X, kjer $K(x,1/2)$ pomeni metrično kroglo z radijem 1/2 in središčem x. Zaradi kompaktnosti, podobno kot zgoraj, obstaja taka končna množica

$$D_2 = \{x_1^2, \dots, x_{k(2)}^2\}$$

točk, da krogle z radijem 1/2 in središči v teh točkah pokrijejo ves X.

V naslednjem koraku podobno kot zgoraj poiščemo končno množico D_3 točk, da krogle z radijem 1/3 in središči v teh točkah pokrijejo X. S takimi koraki nadaljujemo po vseh radijih $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Na ta način pridemo do števno neskončnega števila končnih množic $D_n = \{x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n\}$ točk iz X. Zato je unija

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

teh množic števno neskončna množica.

Pokažimo, da je D gosta v X. Naj bo $x \in X$ poljubna točka v X in U neka njena okolica. Tedaj U vsebuje neko kroglo $K(x, 1/m)$ s središčem v x in radijem $1/m$. Po konstrukciji množic D_i mora biti v krogli $K(x, 1/m)$ vsaj ena točka iz D_m, saj krogle z radiji $1/m$ in središči v točkah iz D_m pokrijejo ves X.

□

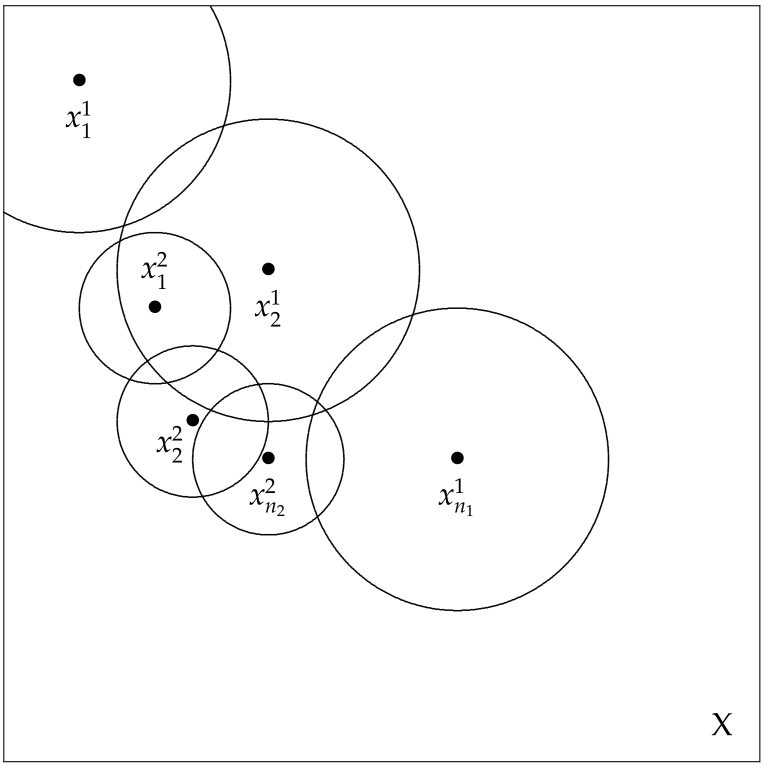
Za vsak slučaj še povejmo, da obrat tega izreka ne velja; separabilni metrični prostor ni nujno kompakten, tak primer je $\mathbb{R}$.

Vaje.

1. Dokažite, da je množica vseh tistih ulomkov na intervalu $[0, 1]$, katerih imenovalci so potence števila 2, gosta podmnožica $[0, 1]$.
2. Dokažite, da je topološki prostor, ki vsebuje gosto povezano množico, povezan.
3. Dokažite, da je kompaktifikacija povezanega prostora spet povezan prostor.

1.9 Aksiomi separacije

Med topološkimi prostori so nekateri posebej bogati z odprtimi množicami, tako da lahko tudi okolice različnih točk dobro razločimo. En tak primer smo že omenili, taki so Hausdorffovi prostori, v katerih imata vsaki dve različni točki tudi disjunktni okolici. Poleg tega smo v trditvi 1.7.5 dokazali, da lahko z odprtima okolicama ločimo kompaktno množico od točke v njenem komplementu. Je pa še nekaj tovrstnih lastnosti, ki jih imajo na primer vsi metrični prostori. V temle razdelku omenimo nekatere take razrede topoloških prostorov.



Slika 1.10. Separabilnost kompaktnega metričnega prostora

Definicije. Množici U topološkega prostora pravimo *okolica* množice K v topološkem prostoru X, če v X obstaja taka odprta množica V, da velja

$$K \subset V \subset U\,.$$

Za Hausdorffov topološki prostor X rečemo, da je *regularen*, če za poljubno zaprto množico K v X in poljubno točko $x \in X \setminus K$ obstajata taki okolici U_K in U_x, da velja

$$U_K \cap U_x = \emptyset\,.$$

Za Hausdorffov topološki prostor X rečemo, da je *normalen*, če za poljubni zaprti množici K_1 in K_2, ki se ne sekata, obstajata disjunktni okolici.

Oglejmo si zelo pomemben izrek, ki se mu ponavadi reče *Urysohnova lema*. Mi ga bomo dokazali le za metrične prostore.

Izrek 1.9.1. *Naj bo X normalen Hausdorffov prostor in naj bosta A in B disjunktni zaprti množici v X. Tedaj obstaja taka zvezna funkcija*

$$f\colon X \longrightarrow [0,1]\,,$$

da velja $f(x) = 0$ za vsak $x \in A$ in $f(x) = 1$ za vsak $x \in B$.

Dokaz. Dokaz tega izreka je za poljuben normalen prostor zelo zapleten, za metrični prostor pa nasprotno zelo enostaven. Z metriko lahko napišemo želeno funkcijo kar eksplicitno

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}\,.$$

Ker sta A in B zaprti in disjunktni in ker je metrika zvezna funkcija obeh spremenljivk (gl. vajo v razdelku 1.10), je funkcija f dobro definirana in zvezna.

□

Le omenimo, da velja še več: za Hausdorffove prostore je obstoj take funkcije za poljuben par disjunktnih zaprtih množic ekvivalenten normalnosti.

Vaje.

1. Dokažite, da sta regularnost in normalnost topološki lastnosti.
2. Dokažite, da je vsak metrični prostor regularen in normalen Hausdorffov prostor.
3. Dokažite, da je regularnost dedna lastnost.
4. Dokažite, da je zaprt podprostor normalnega topološkega prostora normalen.
5. Naj bo X normalen Hausdorffov prostor, ki ima vsaj dve točki. Dokažite, da obstaja zvezna nekonstantna funkcija $X \to [0,1]$.

1.10 Produktna topologija

V tem razdelku si bomo ogledali standardno topologijo na kartezičnem produktu dveh topoloških prostorov.

Definicija. Naj bosta (X,τ) in (Y,σ) topološka prostora. *Produktna topologija* na $X \times Y$ je topologija, katere baza je družina

$$\{U \times V ; U \in \tau, V \in \sigma\}.$$

Primer. Produktna topologija na ravnini $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ima za bazo odprte pravokotnike $(a,b) \times (c,d)$ in je običajna topologija ravnine. Ker v vsak odprt pravokotnik lahko včrtamo odprt krog in obratno, nam trditev 1.2.2 pove, da inducirata družina odprtih pravokotnikov in družina odprtih krogov v $\mathbb{R}^2$ isto topologijo.

◇

Izrek 1.10.1. *Produktna topologija je taka najšibkejša topologija, da sta projekciji*

$$\pi_X \colon X \times Y \longrightarrow X\,, \qquad \pi_Y \colon X \times Y \longrightarrow Y$$

zvezni preslikavi.

Dokaz. Pokažimo najprej, da sta projekciji zvezni. Ker je Y odprta množica v Y, je za vsako odprto množico U v X

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$$

odprta množica v $X \times Y$. Torej je π_X zvezna preslikava. Podobno dokažemo, da je tudi π_Y zvezna.

Očitno je za zveznost projekcij π_X in π_Y potrebno, da so vse množice oblike $\pi_X^{-1}(U)$ za $U \in \tau$ in $\pi_Y^{-1}(V)$ za $V \in \sigma$ odprte v $X \times Y$. Presek takih množic pa je

$$\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V) = U \times V\,.$$

To pa pomeni, da nobena topologija, ki bi bila šibkejša od produktne, ne bi dala zveznih projekcij.

□

V zgornjem dokazu smo dokazali tudi naslednjo trditev.

Posledica 1.10.2. *V produktni topologiji v $X \times Y$ tvorijo bazo topologije končni preseki množic oblike*

$$U \times Y \qquad \text{ali} \qquad X \times V\,,$$

kjer je U poljubna odprta množica v X in V poljubna odprta množica v Y.

Trditev 1.10.3. *Naj bosta X in Y topološka prostora in $X \times Y$ njun produkt. Za vsak $b \in Y$ je funkcija*

$$i_b \colon X \longrightarrow X \times Y\,, x \mapsto (x, b)$$

zvezna in je homeomorfizem na svojo sliko.

Dokaz. Najprej dokažimo zveznost. Naj bo $U \times V$ bazična odprta množica v $X \times Y$. Če $b \notin V$, je i_b-praslika od $U \times V$ prazna; če pa je $b \in V$, je

$$i_b^{-1}(U \times V) = U\,.$$

Oglejmo si preslikavo

$$i_b \colon X \longrightarrow X \times \{b\}\,.$$

Očitno je to bijekcija, je zvezna in tudi odprta preslikava. To pa pomeni, da je homeomorfizem.

□

Izrek 1.10.4. *Produkt $X \times Y$ dveh topoloških prostorov je povezan natanko tedaj, ko sta povezana oba faktorja X in Y.*

Dokaz. Recimo, da je produkt $X \times Y$ povezan. Ker sta projekciji zvezni, sta tedaj tudi X in Y povezana.

Naj bosta X in Y povezana topološka prostora in naj bo $a \in X$ in $b \in Y$. Tedaj sta tudi $X \times \{b\}$ (ki je homeomorfen X) in $\{a\} \times Y$ (ki je homeomorfen Y) povezani množici. Vsaka unija

$$K_y = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$$

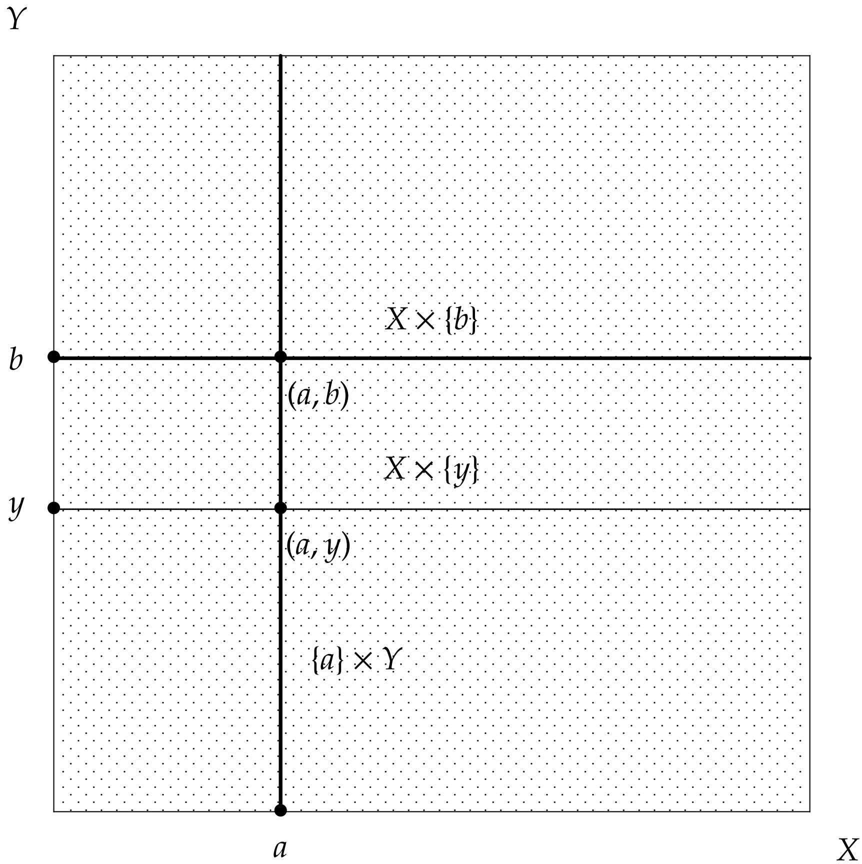
je unija dveh povezanih množic, ki imata skupno točko (a, y), in je zato po izreku 1.6.5 povezana množica. Iz podobnega razloga je povezana tudi unija

$$X \times Y = \bigcup_y K_y\,,$$

saj velja $(a, b) \in K_y$ za vsak $y \in Y$.

□

Izrek 1.10.5. *Če sta topološka prostora X in Y Hausdorffova, je tudi njun produkt $X \times Y$ Hausdorffov prostor.*



Slika 1.11. Produkt povezanih prostorov je povezan

Dokaz. Vzemimo dve različni točki $A = (x_1, y_1)$ in $B = (x_2, y_2)$ v $X \times Y$. Ker sta točki A in B različni, imata vsaj eno koordinato različno. Recimo, da velja $y_1 \neq y_2$. Tedaj lahko izberemo disjunktni okolici V_1 za y_1 in V_2 za y_2. Naj bo $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$ projekcija produkta na drugi faktor, tedaj sta $\pi_Y^{-1}(V_1)$ in $\pi_Y^{-1}(V_2)$ disjunktni okolici za A in B.

□

Izrek 1.10.6. *Produkt dveh kompaktnih prostorov je kompakten prostor.*

Dokaz. Naj bo $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ poljubno odprto pokritje produkta $X \times Y$.

Naj bo $x_0 \in X$. Ker je $\{x_0\} \times Y \cong Y$, ki je kompakten prostor, že končno mnogo množic $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_m}$ pokrije $\{x_0\} \times Y$. Za projekcijo $\pi_X \colon X \times Y \to X$ zlahka dokažemo (vaja!), da je odprta preslikava, zato je poljubna množica $\pi_X(G_\lambda)$ odprta množica v X. Zato so prej omenjene množice $\pi_X(G_{\lambda_1}), \ldots, \pi_X(G_{\lambda_m})$ odprte okolice točke x_0 in je zato tudi njihov presek

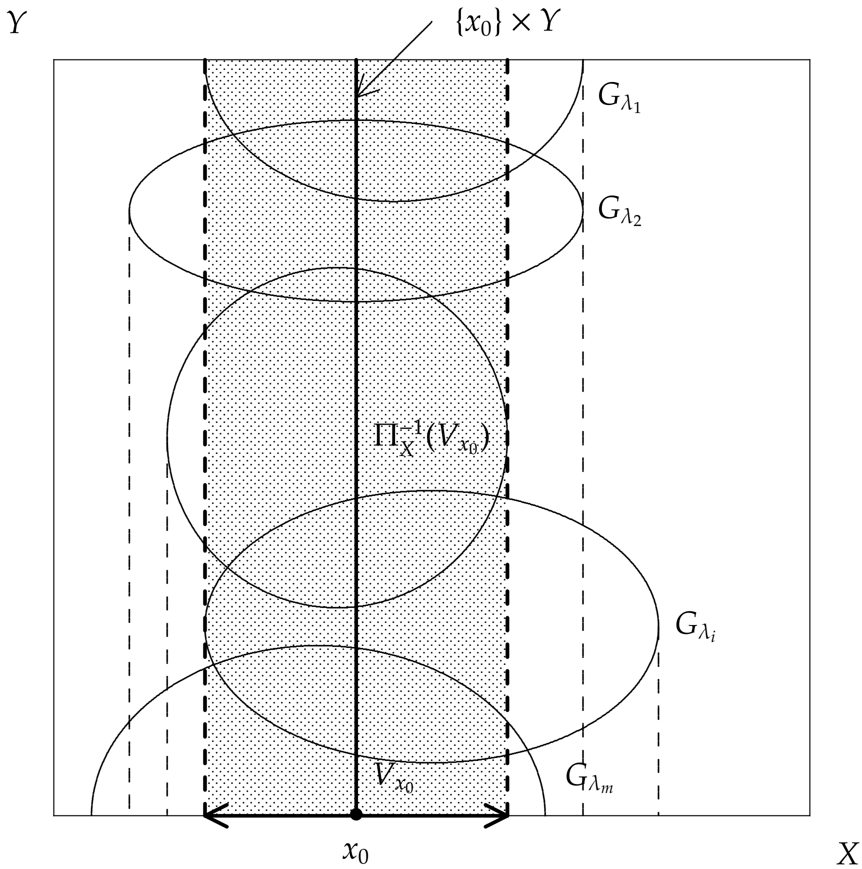
$$V_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{m} \pi_X(G_{\lambda_i})$$

odprta okolica za x_0. Po konstrukciji prasliko $\pi_X^{-1}(V_{x_0})$ pokrijejo odprte množice $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_m}$.

Na podoben način naredimo okolico V_x za vsako točko $x \in X$. Tako dobimo odprto pokritje $\{V_x\}_{x\in X}$ za X in ker je tudi X kompakten prostor, že končno mnogo članov, recimo $V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}$, pokrije X. Ker vsako prasliko $\pi_X^{-1}(V_{x_j})$ pokrije že končno mnogo članov pokritja $\{G_\lambda\}$, in že končno mnogo takih praslik pokrije $X \times Y$, dobimo končno podpokritje pokritja $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

□

Za konec tega razdelka pripomnimo, da vsi zgornji izreki o lastnostih produkta dveh prostorov po indukciji veljajo tudi za končne



Slika 1.12. Produkt dveh kompaktnih prostorov je kompakten prostor

produkte: produkt končnega števila prostorov je povezan natanko takrat, ko so vsi ti prostori povezani; produkt končno mnogo Hausdorffovih prostorov je Hausdorffov; produkt končnega števila kompaktnih prostorov je kompakten.

Za kompaktnost velja celo več: poljuben produkt topoloških prostorov je kompakten natanko tedaj, ko so vsi faktorji kompaktni. Da bomo sploh razumeli to trditev, pa moramo povedati, kaj je produktna topologija v neskončnem kartezičnem produktu $\prod_{i \in J} X_i$ topoloških prostorov X_i. Če je $\mathcal{B}_i$ baza topologije v X_i, je baza produktne topologije družina množic oblike $\prod_{i \in J} B_i$, kjer je končno mnogo množic B_i poljubnih elementov $B_i \in \mathcal{B}_i$, za vse ostale pa velja $B_i = X_i$.

Vaje.

1. Dokažite, da je definicija produktne topologije dobra, torej da je v definiciji produktne topologije omenjena družina res baza topologije na $X \times Y$.

2. Dokažite, da je sta projekciji $\pi_X : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ in $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ odprti preslikavi.

3. Naj bo produkt $X \times Y$ topoloških prostorov X in Y kompakten prostor. Dokažite, da sta tedaj tudi X in Y kompaktna prostora.

4. Naj bo produkt $X \times Y$ topoloških prostorov X in Y Hausdorffov prostor. Dokažite, da sta tedaj tudi X in Y Hausdorffova prostora.

5. Dokažite, da je metrika zvezna preslikava (kot funkcija dveh spremenljivk).

6. Naj bo $\{A_\alpha\}$ baza topologije v X in $\{B_\beta\}$ baza topologije v Y. Dokažite, da je tedaj $\{A_\alpha \times B_\beta\}$ baza topologije produkta $X \times Y$.

7. Imejmo funkcijo

$$f\colon X \longrightarrow Y \times Z\,, \qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x))\,.$$

Dokažite, da je f zvezna natanko tedaj, ko sta zvezni funkciji f_1 in f_2.

8. Dokažite, da je diagonala $D = \{(x, x); x \in X\} \subset X \times X$ homeomorfna prostoru X.

9. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava. Dokažite, da je graf

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$$

homeomorfen prostoru X.

1.11 Kvocientna topologija

Naj bo (X, τ) topološki prostor in naj bo v množici X definirana ekvivalenčna relacija $\sim$, ki razdeli množico X na ekvivalenčne razrede; množico tako dobljenih ekvivalenčnih razredov označimo z $X/\!\sim$. V tem razdelku bomo obravnavali topologijo na $X/\!\sim$, ki jo na naravni način inducira topologija $\mathcal{T}$ na X. Tako dobljeni topologiji na kvocientni množici $X/\!\sim$ rečemo kvocientna ali identifikacijska topologija.

Ta lastnost topologije, da naravno inducira kvocientno topologijo na kvocientni množici, topologijo bistveno loči od metrike, metrika na X namreč ne inducira nobene naravne metrike na $X/\!\sim$, niti v primeru, ko je tudi $X/\!\sim$ metrizabilen prostor (tj. dopušča kakšno metriko). Intuitivno lahko to spoznamo na primeru 2-dimenzionalne sfere ali torusa.

Če imamo krog iz elastične snovi in skupaj zlepimo (v eno točko) ves njegov rob, dobimo nekaj, kar je topološko 2-sfera, nima pa kakšne fiksne geometrijske strukture, saj samo s tem, da smo skupaj zlepili nekatere točke, nismo predpisali nobene razdalje med točkami novo nastalega zlepka (stara razdalja pa ni več dobra: točki v krogu, ki sta daleč narazen, pa blizu roba, prideta v zlepku blizu skupaj).

Podobno velja za torus, ki ga dobimo iz pravokotnika tako, da vsako točko na robu pravokotnika zlepimo z nasproti ležečo točko na nasprotni stranici pravokotnika. To je tudi eden od razlogov za obravnavo topoloških prostorov, čeprav nas morda zanimajo le lepi metrizabilni prostori (na primer podprostori v $\mathbb{R}^n$).

Definicija. Naj bo (X, τ) topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija v množici X in $p\colon X \to X/\!\sim, x \mapsto [x]$ kvocientna projekcija. Množice $U \subset X/\!\sim$, za katere velja $p^{-1}(U) \in \tau$, sestavljajo topologijo σ na $X/\!\sim$, ki ji rečemo *kvocientna* ali *identifikacijska* topologija; topološkemu prostoru $(X/\!\sim, \sigma)$ pa rečemo *kvocientni* ali *identifikacijski* prostor.

Z drugimi besedami bi lahko rekli, da je v kvocientni topologiji v $X/\sim$ odprta vsaka taka množica ekvivalenčnih razredov, da je njihova unija v X odprta množica. Pogosto je ekvivalenčna relacija $\sim$ v X dana s particijo ali razdelitvijo X v disjunktne podmnožice – razrede, ti so ekvivalenčni razredi za relacijo $\sim$: »pripadati istemu razredu«.

Poglejmo si še, kako spoznamo kvocientne (topološke) prostore.

Definicija. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna surjekcija. Če je $V \subset Y$ odprta množica natanko tedaj, ko je praslika $f^{-1}(V)$ odprta, rečemo preslikavi f *kvocientna* ali *identifikacijska preslikava*, prostoru Y pa rečemo *kvocientni* ali *identifikacijski prostor*.

Na prvi pogled morda izgleda, da imamo dva različna pojma kvocientnega prostora, pa temu ni tako. Ni težko pokazati (vaja!), da nam preslikava f inducira ekvivalenčno relacijo $\sim$ v X, definirano s predpisom: za poljubni točki $x_1, x_2 \in X$ velja

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

in da f inducira tak homeomorfizem $\tilde{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$, da dobimo komutativni diagram (tj. $\tilde{f} \circ p = f$)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\
& X/\!\sim \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Opozorimo še na eno stvar. Na prvi pogled izgleda definicija kvocientne preslikave zelo podobna definiciji zvezne preslikave, a gre za pomembno razliko. Za zveznost preslikave $f\colon X \to Y$ zahtevamo, da je praslika odprte množice odprta, za kvocientnost pa (poleg surjektivnosti) tudi to, da je *vsaka* množica $V \subset Y$, katere praslika $f^{-1}(V)$ je odprta v X, odprta.

Posebna primera kvocientnih preslikav so surjekcije, ki so odprte preslikave in surjekcije, ki so zaprte preslikave. Nikakor pa ni res, da bi morala biti kvocientna preslikava bodisi odprta bodisi zaprta preslikava.

Definicija. Naj bo $f\colon X \to Y$ neka surjektivna preslikava. Množici $M \subset X$ rečemo *nasičena* ali *saturirana* (glede na preslikavo f), če je $M = f^{-1}(f(M))$. Množici $f^{-1}(y)$, za poljuben $y \in Y$, pa rečemo *vlakno* preslikave f (nad y).

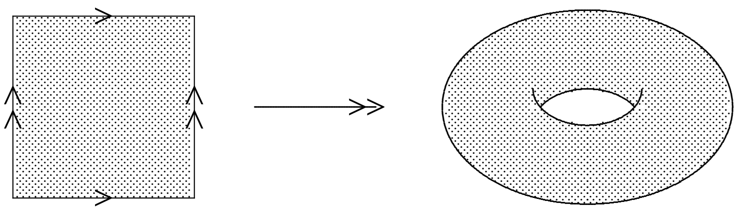
Z drugimi besedami bi lahko rekli, da je množica M nasičena, če je unija vlaken. S pojmom nasičena množica lahko razložimo razliko med odprtimi (ali zaprtimi) surjekcijami in kvocientnimi preslikavami takole: kvocientna preslikava preslika vse nasičene odprte množice v odprte (in podobno vse nasičene zaprte množice v zaprte) ne pa kar vseh odprtih množic, kar zahtevamo za odprte preslikave (in podobno za zaprte). Kasneje si bomo ogledali tudi kakšen konkreten primer kvocientne preslikave, ki ni niti odprta niti zaprta.

Primeri.

1. Naj bo $X \times Y$ produkt topoloških prostorov X in Y. Tedaj je projekcija $p: X \times Y \to X$ (in podobno projekcija $X \times Y \to Y$) kvocientna projekcija. Taka projekcija je vedno odprta preslikava, v splošnem pa ni zaprta. Za protiprimer vzemimo zaprto množico $\{(x, x^{-1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\}$ v $\mathbb{R}^2$, ki se s projekcijo preslika v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ki pa ni zaprta v $\mathbb{R}$.

2. Naj bo $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ in $Y = [0,2] \subset \mathbb{R}$. Preslikava $f: X \to Y$,
$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0,1] \\ x-1\,, & x \in [2,3] \end{cases}$$
je zvezna surjekcija in zaprta preslikava, torej je tudi kvocientna preslikava. Ni pa odprta preslikava, saj se množica $[0,1]$, ki je odprta v X, ne preslika v odprto množico v Y.

3. Naj bo D enotski krog v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Kvocientni prostor $D/\partial D$, ki ga dobimo, če v D identificiramo rob ∂D v eno točko, je homeomorfen 2-sferi S^2. Naj bo preslikava $p: D \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, dana s predpisom
$$p(r,\varphi) = (\cos\varphi\cos(r\pi - \pi/2), \sin\varphi(r\pi - \pi/2), \sin(r\pi - \pi/2))\,,$$
kjer sta r in φ polarni koordinati v D. Preslikava p je kvocientna preslikava, praslike vseh točk v sferi, razen »severnega pola«



Slika 1.13. Torus je kvocient kvadrata

($\theta = \pi/2$), so kar posamezne točke, le praslika severnega pola je ravno rob ∂D kroga D. Torej velja $D/\partial D \cong S^2$.

4. V ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ imamo produkt $A = [0,1] \times [0,1]$ enotskih intervalov. Naj bo T kvocientni prostor, ki ga inducira ekvivalenčna relacija $\sim$ v A, definirana takole: točka $(x, y) \in A$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, je v relaciji $\sim$ le sama s sabo; na robu A pa velja $(x, 0) \sim (x, 1)$ in $(0, y) \sim (1, y)$ za $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. To ponazorimo s sliko 1.13.

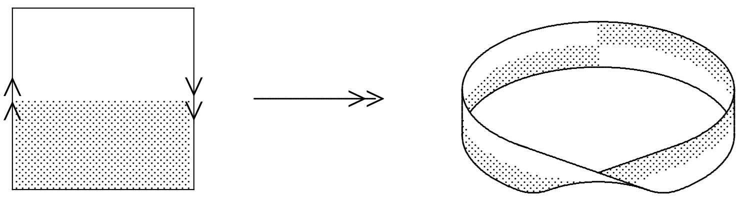
   Prostor T je *torus*, ali natančneje, T je homeomorfen podprostoru

   $$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

   v $\mathbb{R}^3$ (in hkrati tudi homeomorfen produktu $S^1 \times S^1$). Homeomorfizem $h: T \to \mathbb{T}$ inducira preslikava

   $$\hat{h}: A \longrightarrow \mathbb{T}, \qquad \hat{h}(\xi, \eta) = ((2-\cos\theta)\cos\xi, (2-\cos\theta)\sin\xi, \sin\xi),$$

   kjer sta ξ in η kartezični koordinati v $A = [0,1] \times [0,1]$.



Slika 1.14. Möbiusov trak je kvocient kvadrata

5. V pravokotniku $X = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ imejmo ekvivalenčno relacijo $\sim$, definirano takole:

$$(0,y) \sim (1,1-y) \text{ za vsak } y \in [0,1],$$

$(x,y) \in (0,1) \times [0,1]$ pa so v relaciji $\sim$ le same s sabo. Tedaj rečemo kvocientnemu prostoru $X/{\sim}$ *Möbiusov trak*. Ta prostor lahko vložimo v $\mathbb{R}^3$ (to pomeni, da obstaja podprostor v $\mathbb{R}^3$, ki mu je homeomorfen) in ga kaže slika 1.14.

6. V pravokotniku $X = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ imejmo ekvivalenčno relacijo $\sim$, definirano takole:

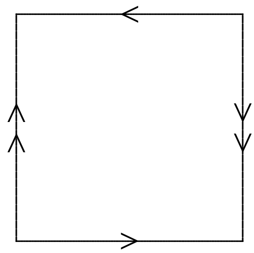
$$(0,y) \sim (1,1-y) \text{ za vsak } y \in [0,1]$$

in

$$(x,0) \sim (1-x,1) \text{ za vsak } x \in [0,1],$$

točke $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$ pa so v relaciji $\sim$ le same s sabo. Identifikacijo z relacijo $\sim$ ponavadi označimo tako, kot kaže slika 1.15 na naslednji strani.

Tedaj rečemo kvocientnemu prostoru $X/{\sim}$ *projektivna ravnina*. Projektivne ravnine pa ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^3$.



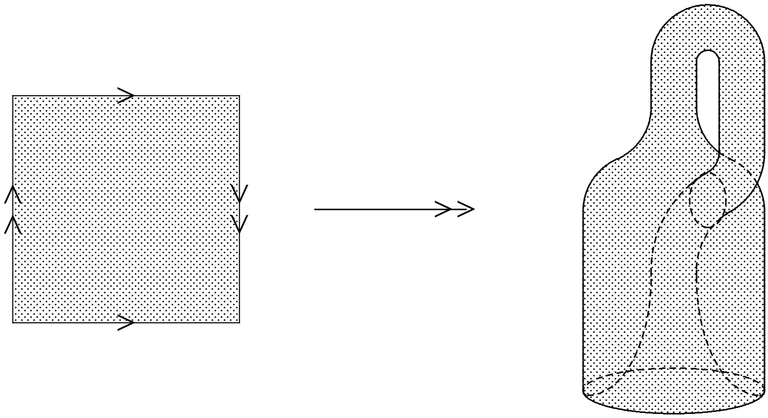
Slika 1.15. Projektivna ravnina je kvocient kvadrata

7. V pravokotniku $X = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ imejmo ekvivalenčno relacijo $\sim$, definirano takole: $(0,y) \sim (1,1-y)$ za poljuben $y \in [0,1]$, $(x,0) \sim (x,1)$ za poljuben $x \in [0,1]$, točke $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$ pa so v relaciji $\sim$ le same s sabo. Identifikacijo z relacijo $\sim$ ponavadi označimo tako, kot kaže slika 1.16 na naslednji strani.

   Tedaj rečemo kvocientnemu prostoru $X/\sim$ *Kleinova steklenica*. Tudi Kleinove steklenice ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^3$.

$\diamond$

O kvocientni topologiji in kvocientnih preslikavah bi se dalo še veliko povedati. Za konec le omenimo, da je kompozitum kvocientnih preslikav vedno kvocientna preslikava (dokaz lahko naredite za vajo), da pa produkt kvocientnih preslikav ni nujno kvocientna preslikava; če je prostor X Hausdorffov, še nikakor ni rečeno, da bi moral biti poljubni kvocientni prostor $X/\sim$ Hausdorffov (gl. vajo 16 v razdelku 1.4), obstaja pa kriterij za relacije $\sim$ v Hausdorffovih prostorih, ki dajo kvocientom $X/\sim$ Hausdorffove topologije.



Slika 1.16. Kleinova steklenica je kvocient kvadrata

Vaje.

1. Dokažite, da je družina σ iz definicije kvocientne topologije res topologija na $X/{\sim}$.

2. Dokažite, da kvocientna preslikava $f\colon X \to Y$ inducira ekvivalenčno relacijo $\sim$ v X,

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

in da f inducira tak homeomorfizem $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y$, da velja $\tilde{f}p = f$.

3. Dokažite, da je surjekcija $f\colon X \to Y$ kvocientna preslikava natanko tedaj, ko za poljubno množico $V \subset Y$ velja ekvivalenca

$$V \text{ je zaprta} \Longleftrightarrow f^{-1}(V) \text{ je zaprta}\,.$$

4. Dokažite, da je poljubni kvocientni prostor kompaktnega prostora kompakten.

5. Dokažite, da je poljubni kvocientni prostor povezanega prostora povezan.

6. Kaj je kvocientni prostor intervala $[0, 1]$ za ekvivalenčno relacijo $\sim$, v kateri je $0 \sim 1$ in $x \sim x$ za vsak $x \in [0, 1]$?

7. Dokažite, da so torus, Möbiusov trak, projektivna ravnina in Kleinova steklenica Hausdorffovi topološki prostori.

1.12 Metrična topologija

Še enkrat se ozrimo na metrične prostore, s katerimi smo sicer uvedli definicijo topološkega prostora. Najprej ponovimo, kako nam metrika določa topologijo.

Definicija. Naj bo (M, d) metrični prostor. Topologijo v M, katere baza so odprte metrične krogle, imenujemo *metrična topologija* ali *topologija inducirana z metriko d*.

Iz trditve 1.2.1 sledi (gl. vajo 1 v razdelku 1.2) naslednja karakterizacija odprtih množic v metrični topologiji.

Trditev 1.12.1. *V metrični topologiji je množica U odprta natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in U$ obstaja neka odprta krogla $K(x, \varepsilon)$, vsebovana v U.*

Za vsak slučaj opozorimo na terminologijo, ki bi lahko koga zavedla. Zaprta krogla v metričnem prostoru ni nujno zaprtje odprte krogle z istim polmerom in središčem.

Primer. Naj bo M množica z več kot eno točko in d trivialna metrika

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x = y, \\ 1, & \text{če je } x \neq y. \end{cases}$$

v njej. Odprta krogla $K(x,1) = \{y \in M; d(x,y) < 1\}$ vsebuje le točko x, ki pa je v tej metrični topologiji (ki je seveda diskretna topologija) hkrati odprta in zaprta množica. Zaprta krogla $\bar{K}(x,1) = \{y \in M; d(x,y) \leq 1\}$ pa je kar cel prostor M.

$\diamond$

V prejšnjih razdelkih smo že omenili naslednjo trditev (gl. vajo 2 v razdelku 1.9).

Trditev 1.12.2. *Vsak metrični prostor je Hausdorffov, regularen in normalen prostor.*

Ker smo že srečali topološke prostore, ki niso normalni ali pa niti niso Hausdorffovi, sklepamo, da niso vsi topološki prostori metrični. Topologije, ki so inducirane z metriko, so posebej lepe.

Definicija. Naj bo (E,τ) topološki prostor. Če obstaja taka metrika d na E, da je topologija τ inducirana z metriko d, imenujemo prostor E *metrizabilen*.

Nasploh je vprašanje, če je dani topološki prostor metrizabilen, zelo zanimivo in nima lahkega odgovora. Mi se s tem ne bomo ukvarjali, saj nas zanimajo predvsem tisti topološki prostori, ki so homeomorfni podprostorom v $\mathbb{R}^n$. Že iz analize pa vemo, da so vsi evklidski prostori $\mathbb{R}^n$ metrični. Ker metrika na neki množici inducira metriko na vsaki njeni podmnožici, so tedaj tudi vsi podprostori evklidskih prostorov metrični.

Oglejmo si drugo vprašanje: če množica M dopušča dve različni metriki d in r, kdaj inducirata isto topologijo v M (takima metrikama rečemo *ekvivalentni* metriki)? Odgovor nam da naslednji izrek, ki skoraj neposredno sledi iz izreka 1.2.2.

Izrek 1.12.3. *Naj bosta na množici M definirani metriki d in r, metrika d naj inducira topologijo τ, metrika r pa topologijo σ. Tedaj je topologija σ finejša od topologije τ natanko tedaj, ko za vsak $x \in M$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja*

$$K_r(x, \delta) \subset K_d(x, \varepsilon)\,.$$

Dokaz. Naj bo σ finejša od τ in naj bo $x \in M$. Tedaj po trditvi 1.2.2 za odprto d-kroglo $K_d(x, \varepsilon)$ (ki je element baze topologije τ) obstaja neka odprta r-krogla K'_r (za katero pa ni nujno, da bi imela središče v x), da velja $x \in K'_r \subset K_d(x, \varepsilon)$. Znotraj krogle K'_r pa obstaja neka odprta r-krogla $K_r(x, \delta)$ in tako dobimo

$$x \in K_r(x, \delta) \subset K'_r \subset K_d(x, \varepsilon)\,.$$

Naj velja zgornji pogoj za krogle in pokažimo, da je tedaj σ finejša od τ. Če imamo neko odprto d-kroglo, ki vsebuje x, lahko v njej najdemo odprto d-kroglo $K_d(x, \varepsilon)$, po predpostavki pa tedaj tudi tako r-kroglo $K_r(x, \delta)$, da velja

$$K_r(x, \delta) \subset K_d(x, \varepsilon)\,.$$

Po trditvi 1.2.2, je tedaj topologija σ (ki jo generirajo r-krogle) finejša od topologije τ (ki jo generirajo d-krogle).

□

Dokažimo še naslednji izrek, ki smo ga sicer že priporočili za vajo v razdelku 1.4.

Izrek 1.12.4. *Naj bo $f\colon (M,d) \to (N,r)$ neka funkcija iz metričnega prostora (M,d) v metrični prostor (N,r). Funkcija f je v točki $x_0 \in M$ zvezna (glede na topologijo, ki jo inducirata metriki d oziroma r) natanko tedaj, ko za poljubno pozitivno realno število $\varepsilon > 0$, obstaja tako pozitivno realno število $\delta > 0$, da velja*

$$f(K_d(x_0,\delta)) \subset K_r(f(x_0),\varepsilon)\,.$$

Dokaz. Naj bo funkcija f zvezna v točki x_0. Tedaj za poljubno okolico V slike $f(x_0)$ obstaja taka okolica U točke x_0, da velja $f(U) \subset V$.

Po definiciji metrične topologije obstaja neka krogla. Naj bo $\varepsilon > 0$, tedaj je tudi $K_r(f(x_0),\varepsilon)$ okolica točke $f(x_0)$ in zato obstaja neka okolica U', ki se preslika z f v $K_r(f(x_0),\varepsilon)$. Po definiciji metrične topologije obstaja taka krogla $K_d(x_0,\delta)$, $\delta > 0$, ki leži v U'. Torej velja

$$f(K_d(x_0,\delta)) \subset K_r(f(x_0),\varepsilon)\,.$$

Obratno, naj funkcija f zadošča v izreku omenjenemu $\varepsilon - \delta$ pogoju in pokažimo, da je f zvezna v x_0. Naj bo V neka okolica točke $f(x_0)$. Tedaj obstaja krogla $K_r(f(x_0),\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, ki leži v V. Za ta ε po predpostavki obstaja tak $\delta > 0$, da velja

$$f(K_d(x_0,\delta)) \subset K_r(f(x_0),\varepsilon) \subset V\,,$$

ker je tudi $K_d(x_0,\delta)$ okolica točke x_0, smo pokazali, da je f zvezna v točki x_0.

□

Omenimo, da se da prostor $\mathbb{R}^n$ opremiti z več različnimi, znanimi metrikami, ki porodijo v njem isto – evklidsko topologijo. Te metrike so porojene z normami $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{R}^n$ in to, da vse porodijo na $\mathbb{R}^n$ isto topologijo, bomo pokazali v poglavju 6.

Vaje.

1. Naj bo $A \neq \emptyset$ podmnožica v metričnem prostoru (M, d) in x poljubna točka v M. Tedaj je razdalja točke x od množice A
$$d(x, A) = \inf\{d(x, a);\ a \in A\}\,.$$
Dokažite, da je $x \in \overline{A}$ natanko tedaj, ko je $d(x, A) = 0$. Odtod izpeljite karakterizacijo zaprtih množic v metričnem prostoru: A je zaprta množica, če vsebuje vse točke, katerih oddaljenost od A je 0.

2. Dokažite, da je vsaka zaprta krogla v metričnem prostoru tudi zaprta množica.

3. Preverite ali je metrizabilnost topološka lastnost.

4. Dokažite, da je metrizabilnost hereditarna lastnost.

5. Naj bo X metrizabilen topološki prostor. Dokažite, da je tedaj tudi $X \times X$ metrizabilen prostor.

6. Naj bo (M, d) metrični prostor. Definirajmo novi metriki r in ϱ na M s predpisoma
$$r(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}\,, \qquad \varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}\,.$$
Preverite, da sta r in ϱ res metriki in ugotovite, ali inducirata na M isto topologijo kot d. Dokažite tudi, da sta v obeh metrikah r in ϱ razdalji med poljubnima točkama prostora M največ 1.

7. Naj bosta d in r dve metriki na množici M in naj obstajata taki pozitivni števili c in k, da za poljubni točki $x, y \in M$ veljata neenakosti
$$d(x, y) \leq c \cdot r(x, y)\,, \qquad r(x, y) \leq k \cdot d(x, y)\,.$$
Dokažite, da sta metriki d in r inducirata isto topologijo na M.

Poglavje 2

Kompaktni metrični prostori

Že v prvem poglavju smo definirali kompaktnost prostorov in množic, zdaj pa si pobliže oglejmo odlične lastnosti, ki jih imajo kompaktni prostori, še posebej kompaktni metrični prostori.

2.1 Stekališče

V tem razdelku bomo obravnavali še eno zelo pomembno lastnost kompaktnih množic, namreč to, da ima v njih vsako zaporedje vsaj eno stekališče.

Še prej pa si poglejmo eno karakteristično lastnost kompaktnih množic, katere posebni primer smo pri analizi a že srečali kot lastnost vloženih intervalov. Najprej pa potrebujemo še eno definicijo.

Definicija. Družina $\mathcal{G}$ množic ima *lastnost končnega preseka*, če je za vsako končno poddružino

$$\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \subset \mathcal{G}$$

presek $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ neprazen.

Primer. Če je družina $\mathcal{G}$ neskončna in ima lastnost končnega preseka, še ni nujno, da je tudi presek te družine prazen. Oglejmo si naslednji protiprimer. Naj bo $A_n = \mathbb{R} \setminus (n-1, n+1)$, kjer je $n \in \mathbb{Z}$. Ta družina ima lastnost končnega preseka, saj so v preseku poljubne končne poddružine $\{A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}\}$ vsa realna števila, ki so vsaj za 1 večja od največjega n_i. Brez težav pa vidimo, da ni prav nobenega realnega števila, ki bi bil v preseku vse družine $\{A_n; n \in \mathbb{Z}\}$.

◇

Izrek 2.1.1. *Topološki prostor X je kompakten tedaj in le tedaj, ko ima v njem vsaka družina zaprtih množic $\mathcal{G}$, ki ima lastnost končnega preseka, neprazen presek, to je*

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \neq \emptyset\,.$$

Dokaz. Naj bo X kompakten prostor in naj bo $\mathcal{G}$ družina zaprtih množic z lastnostjo končnega preseka. Družina komplementov $\mathcal{O} = \{O = X \setminus G; G \in \mathcal{G}\}$ je družina odprtih množic v X. Velja naslednja ekvivalenca.

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \emptyset \Longleftrightarrow \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O = X$$

Torej: če ima družina $\mathcal{G}$ prazen presek, je $\mathcal{O}$ odprto pokritje za X. Ker je X kompakten, obstaja končno podpokritje pokritja $\mathcal{O}$. To pa pomeni, da obstaja končna poddružina v $\mathcal{G}$ (namreč komplementi članov končnega podpokritja), ki ima prazen presek, to pa je v nasprotju s predpostavko, da ima $\mathcal{G}$ lastnost končnega preseka. Tako smo pokazali, da presek družine $\mathcal{G}$ ne more biti prazen.

Za dokaz obratne implikacije predpostavimo, da je X tak topološki prostor, v katerem ima vsaka družina zaprtih množic z lastnostjo končnega preseka neprazen presek. Denimo, da X ni kompakten in naj bo $\mathcal{O}$ tako odprto pokritje za X, ki nima končnega podpokritja.

Naj bo
$$\mathcal{G} = \{G = O^C; O \in \mathcal{O}\}$$
družina komplementov. Ker je $\mathcal{O}$ pokritje, velja
$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \emptyset\,.$$
Ker smo predpostavili, da $\mathcal{O}$ nima končnega podpokritja, ima družina komplementov (ki je družina zaprtih množic) lastnost končnega preseka in je po naši predpostavki
$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \neq \emptyset\,.$$
Do tega protislovja nas je pripeljala predpostavka, da odprto pokritje $\mathcal{O}$ nima končnega podpokritja. Torej vsako odprto pokritje za X ima končno podpokritje in je zato X res kompakten prostor.

□

Definicije. *Zaporedje* (a_n) v topološkem prostoru X je funkcija $\mathbb{N} \to X, n \mapsto a_n \in X$. Zožitvi te preslikave na množico $\{m\} \subset \mathbb{N}$ rečemo tudi m-ti *člen* zaporedja (a_n) in ga ponavadi označimo kar z istim simbolom kot njegovo sliko, tj. z a_m.

Točki $x \in X$ rečemo *stekališče* zaporedja (a_n), če se z zaporedjem (a_n) v vsako okolico točke x preslika neskončno naravnih števil. Če pa se v vsako okolico točke x z (a_n) preslikajo vsa naravna števila razen končno mnogih, rečemo točki x *limita* zaporedja (a_n), za zaporedje (a_n) pa rečemo, da je *konvergentno* in da *konvergira* k točki x.

Primer. Pojem zaporedja realnih števil in pojma stekališča in limite realnih števil poznamo že iz analize. Za vsak slučaj si razliko med pojmoma stekališče in limita oglejmo kar na preprostem primeru zaporedja realnih števil, danega s predpisom $a_n = (-1)^n$. Brez težav preverimo, da sta točki 1 in -1 stekališči tega zaporedja, limite pa seveda to zaporedje nima.

◇

Iz definicije stekališča sledi, da je stekališče v zaprtju $\overline{\{a_n; n \in \mathbb{N}\}}$ množice slik zaporedja (seveda pa ni nujno v množici $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$).

Primer. Zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ ima limito 0, ki ni v množici $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, je pa v njenem zaprtju.

◇

Izrek 2.1.2. *Vsako zaporedje v kompaktnem prostoru ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Naj bo X kompakten prostor in (a_n) zaporedje v njem. Naredimo družino $\mathcal{F}$ množic

$$F_m = \overline{\{a_k; k > m\}}\,,$$

ki so zaprtja množic slik zaporedij, ki jih dobimo iz (a_n) tako, da mu odrežemo prvih m členov. To je družina zaprtih množic, ki ima lastnost končnega preseka, saj je presek

$$F_{m_1} \cap \ldots \cap F_{m_k}$$

kar enak F_s, kjer je $s = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$ in F_s ni prazna množica. Ker je X kompakten prostor, je po izreku 2.1.1 presek

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

neprazen. Vsaka točka $x \in A$ pa je stekališče zaporedja (a_n), saj vsaka okolica točke x seka neskončno množic $\{a_k; k > m\}$.

□

Definicija. Zaporedje (a_n) je *podzaporedje* zaporedja (b_n) natanko tedaj, ko obstaja tako strogo naraščajoče zaporedje (i_n), da velja

$$a_k = b_{i_k}$$

za vsako naravno število i.

Vaje.

1. Dokažite, da ima zaporedje v Hausdorffovem prostoru kvečjemu eno limito.
2. Dokažite, da zvezna preslikava preslika konvergentno zaporedje v konvergentno zaporedje in limito prvega zaporedja v limito drugega.
3. Dokažite, da je v metrizabilnem prostoru točka x stekališče zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko neko njegovo podzaporedje konvergira k x.
4. Z uporabo izreka 2.1.2 pokažite, da $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ni kompakten topološki prostor.

2.2 Lebesguova lema

Naslednji izrek je prvi odkril Henri Lebesgue.

Izrek 2.2.1. (Lebesguova lema.) *Naj bo X kompakten metrični prostor in naj bo $\mathcal{U}$ poljubno odprto pokritje prostora X. Tedaj obstaja tako pozitivno* *realno število* δ*, ki mu rečemo* Lebesguovo število pokritja $\mathcal{U}$*, da za vsako množico* A *v* X *velja implikacija*

$$\operatorname{diam} A < \delta \Longrightarrow \exists U \in \mathcal{U} \colon A \subset U\,.$$

Dokaz. Pa recimo, da za neki kompaktni metrični prostor X ta izrek ne velja. Tedaj obstaja za X tako odprto pokritje $\mathcal{U}$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja množica s premerom manj kot δ, ki ni vsebovana v nobenem članu $\mathcal{U}$. Naj bo za $\delta = 1/n$ množica $A_n \subset X$ taka, da $\operatorname{diam} A_n < 1/n$ in A_n ni vsebovana v nobenem članu pokritja $\mathcal{U}$. V vsaki množici A_n izberimo neko točko a_n in pokažimo, da zaporedje (a_n) nima nobenega stekališča.

Recimo, da bi zaporedje (a_n) imelo stekališče a. Točka a leži v nekem članu U pokritja $\mathcal{U}$ in ker je U odprta množica, za neko kroglo $K(a, 1/n)$ s središčem v a velja

$$K(a, 1/n) \subset U\,.$$

Naj bo $m > 2n$. Tedaj bi za vsak $k > m$ veljalo

$$a_k \in K(a, 1/m) \Longrightarrow A_k \subset K(a, 1/n) \subset U\,.$$

Predpostavka, da je a stekališče zaporedja (a_n) nas je pripeljala do protislovja z lastnostmi množic A_n. Neobstoj Lebesguovega števila za pokritje $\mathcal{U}$ torej implicira obstoj zaporedja v X, ki nima stekališča. To pa je po trditvi 2.1.2 v nasprotju s predpostavko, da je X kompakten.

□

Naslednja posledica pravzaprav ni posledica zgornjega izreka, ampak je posledica zgornjega dokaza. V tem dokazu namreč nismo potrebovali kompaktnosti, ampak je zadoščala lastnost, da ima vsako zaporedje konvergentno podzaporedje.

Posledica 2.2.2. *V metrizabilnem prostoru ima vsako zaporedje konvergentno podzaporedje natanko tedaj, ko je ta prostor kompakten.*

Dokaz. Najprej pokažimo lažjo smer: naj bo X kompakten metrizabilen prostor in naj bo (a_n) poljubno zaporedje v X; pokažimo, da ima to zaporedje konvergentno podzaporedje. Po trditvi 2.1.2 ima zaporedje (a_n) stekališče a. Konstruirajmo podzaporedje (a_{i_j}), ki konvergira k a. Izberimo si metriko d, ki inducira dano topologijo v topološkem prostoru X in naj bodo K_n metrične krogle s središčem v a in polmerom $1/n$. Za a_{i_1} izberemo poljubni element zaporedja (a_n), ki je v K_1, naslednje elemente pa izbiramo takole: a_{i_k} naj bo poljuben element v (a_n) z indeksom $i_k > i_{k-1}$, ki je v K_k. Po konstrukciji je a limita podzaporedja (a_{i_k}), $k \in \mathbb{N}$.

Še težja smer: naj v X za vsako zaporedje obstaja konvergentno podzaporedje.

V prvem koraku bomo pokazali, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja končno mnogo krogel s polmerom ε, ki pokrivajo X. Pa recimo, da ni tako, torej obstaja neki $\eta > 0$, da se X ne da pokriti s končno mnogo krogel s polmerom η. Izberimo poljubno točko x_1 v X, izberimo neko točko x_2 v $X \setminus K(x_1, \eta)$, v i-tem koraku izberimo

$$x_i \in X \setminus (K(x_1, \eta) \cup K(x_2, \eta) \cup \ldots \cup K(x_{i-1}, \eta)) .$$

Na ta način lahko točke izbiramo brez konca in kraja, saj po predpostavki končna unija η krogel nikoli ne pokrije vsega X. Tako dobimo zaporedje, ki pa nima prav nobenega konvergentnega podzaporedja. To je v protislovju s predpostavko, da ima v X vsako zaporedje neko konvergentno podzaporedje. Torej res v našem primeru za vsak ε obstaja končno pokritje za X, ki ga sestavljajo ε-krogle.

Zdaj pokažimo, da je X kompakten. Naj bo $\mathcal{U}$ poljubno odprto pokritje za X. Po dokazu 2.2.1 obstaja za $\mathcal{U}$ Lebesguovo število δ. Po prvem koraku obstaja končno mnogo krogel s polmerom $\delta/3$, ki pokrijejo X, premer vsake take krogle je $2\delta/3$ in zato vsaka leži v nekem članu pokritja $\mathcal{U}$. Za vsako od teh krogel torej lahko izberemo en član pokritja $\mathcal{U}$, v katerem leži. Ker so že te krogle pokrile X, ga seveda pokrije tudi tako izbrana podmnožica $\mathcal{U}$.

□

2.3 Polnost

V tem razdelku si bomo ogledali še eno pomembno posledico izreka 2.2.1. Ta pravi, da je vsak kompakten metrični prostor poln. Poleg tega si bomo zadali tudi obratno vprašanje: kdaj je poln metrični prostor kompakten.

Najprej ponovimo nekaj znanih pojmov iz analize.

Definicija. Zaporedju $a_n\colon \mathbb{N} \to M$ v metričnem prostoru (M, d) rečemo *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno število n_ε, da za vsaka $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ velja implikacija

$$m_1, m_2 > n \Longrightarrow d(a_{m_1}, a_{m_2}) < \varepsilon \,.$$

Definicija. Za metrični prostor rečemo, da je *poln*, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno.

Izrek 2.3.1. *Vsak kompakten metrični prostor je poln.*

Dokaz. Naj bo (a_n) poljubno Cauchyjevo zaporedje v kompaktnem metričnem prostoru M. Po trditvi 2.1.2 ima to zaporedje vsaj eno stekališče ω. Pokažimo, da je to tudi limita zaporedja (a_n). Za vsak $\varepsilon > 0$ moramo najti tak $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da bo veljala implikacija

$$n > N_\varepsilon \Longrightarrow d(\omega, a_n) < \varepsilon \,. \tag{2.1}$$

Ker je zaporedje (a_n) Cauchyjevo, za $\varepsilon/2$ najdemo $n_{\varepsilon/2}$ da za $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ velja

$$m_1, m_2 > n_{\varepsilon/2} \Longrightarrow d(a_{m_1}, a_{m_2}) < \varepsilon/2 \,.$$

Ker je ω stekališče zaporedja (a_n), obstaja tak $m > n_{\varepsilon/2}$, da velja $d(a_m, \omega) < \varepsilon/2$. Naj bo $n > n_{\varepsilon/2}$. Tedaj dobimo

$$d(\omega, a_n) \leq d(\omega, a_m) + d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Za dani $\varepsilon > 0$ smo torej našli naravno število $N_\varepsilon = n_{\varepsilon/2}$, da velja implikacija (2.1) in tako smo pokazali, da je ω res limita zaporedja (a_n). Ker to velja za poljubno Cauchyjevo zaporedje, smo pokazali, da je M poln metrični prostor.

□

Pripomniti pa moramo, da polnost ni topološka lastnost, ampak je odvisna od metrike (ker je Cauchyjeva lastnost zaporedja odvisna od metrike). Za prostor $\mathbb{R}$ vemo iz analize, da je poln prostor, odprti interval $(0, 1)$, ki mu je homeomorfen, pa ni poln (Cauchyjevo zaporedje $a_n = 1/n$ v $(0, 1)$, na primer, ne konvergira).

Kdaj pa je poln metrični prostor kompakten? V nadaljevanju tega razdelka bomo dokazali izrek, ki nam pove, da je poln metrični prostor kompakten natanko tedaj, ko ima naslednjo lastnost.

Definicija. Za metrični prostor (M, d) rečemo, da je *totalno omejen*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja končno pokritje za M, ki ga sestavljajo krogle s polmerom ε.

Izrek 2.3.2. *Metrični prostor (M, d) je kompakten natanko tedaj, ko je poln in totalno omejen.*

Dokaz. Najprej dokažimo »trivialno« smer: če je metrični prostor kompakten, je po trditvi 2.3.1 poln, totalno pa je omejen, ker ima zaradi kompaktnosti pokritje vseh krogel s polmerom ε končno podpokritje.

In zdaj še netrivialna smer: naj bo (M, d) poln in totalno omejen. Pokazali bomo, da ima tedaj vsako zaporedje v njem neko konvergentno podzaporedje, odkoder po 2.2.2 sledi, da je (M, d) kompakten prostor.

Naj bo (x_n) zaporedje v (M, d). V njem bomo s popolno indukcijo konstruirali podzaporedje, ki je Cauchyjevo.

V prvem koraku izberimo prvi člen x_{i_1} podzaporedja. Ker je prostor totalno omejen, ga lahko pokrijemo s končno mnogo kroglami s polmerom 1. Izmed teh krogel izberimo tako, označimo jo z B_1, v kateri je neskončno mnogo elementov zaporedja (x_n) in z J_1 označimo tisto podmnožico elementov v $\mathbb{N}$, katerih členi zaporedja (x_n) so v izbrani krogli. Prvi člen x_{i_1} podzaporedja $(x_n)_{n \in J_1}$ naj bo poljubni element v B_1.

V naslednjem koraku izberimo drugi člen x_{i_2} podzaporedja. Prostor M pokrijmo s končno mnogo kroglami s polmerom $1/2$ in izberimo tako, označimo jo z B_2, ki vsebuje neskončno členov podzaporedja $(x_n)_{n \in J_1}$. Z J_2 pa označimo podmnožico tistih indeksov v J_1, katerih členi zaporedja (x_n) so v B_2. Po konstrukciji je tudi J_2 neskončna podmnožica naravnih števil. Za x_{i_2} izberemo poljubni člen zaporedja, ki leži v B_2 in za katerega je $i_2 > i_1$.

V k-tem koraku pokrijemo prostor s končno mnogo kroglami polmera $1/k$, izberemo tako kroglo B_k, v kateri je neskončno mnogo členov podzaporedja $(x_n)_{n \in J_{k-1}}$. Podmnožica tistih elementov v J_{k-1}, katerih členi zaporedja so v B_k, naj bo J_k, za x_{i_k} pa izberimo tak člen zaporedja, ki leži v B_k in za katerega je $i_k > i_{k-1}$.

Oglejmo si pravkar definirano podzaporedje $(x_{i_k})_{i_k \in J_k}$. Zanj velja:

$$p, q > m \Longrightarrow d(x_{i_p}, x_{i_q}) < \frac{2}{m}\,.$$

Za dano pozitivno število ε lahko poiščemo tako naravno število m, da velja $\varepsilon > 2/m$ in zaradi zgornje lastnosti sta si poljubna člena podzaporedja $(x_{i_k})_{i_k \in J_k}$ manj kot ε vsaksebi. Torej je konstruirano podzaporedje res Cauchyjevo.

□

Izrek 2.3.3. *Naj bo (X, d) metrični prostor in K kompaktna množica v X. Tedaj je K zaprta in omejena množica.*

Dokaz. Ker je metrični prostor Hausdorffov, iz trditve 1.7.4 sledi, da je K zaprta množica. Dokazati moramo še omejenost. Ker je K kompaktna množica v X, je (K, d) kompakten prostor in zato po zgornjem izreku 2.3.2 totalno omejen. Takoj pa se vidi, da je totalno omejen prostor tudi omejen metrični prostor.

□

Obrat pa ne velja; vsaka zaprta in omejena množica v metričnem prostoru ni kompaktna. Protiprimer je prostor s trivialno metriko $d(x, y) = 1$, za $x \neq y$, in z neskončno mnogo točkami, ki je zaprt in omejen, vendar ni kompakten.

Dokažimo zdaj Heine-Borel-Lebesguov izrek.

Izrek 2.3.4. *V $\mathbb{R}^n$ je množica kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

Dokaz. Da je vsaka kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$ zaprta in omejena sledi iz zgornjega izreka. Pokažimo torej obratno trditev, da je poljubna zaprta in omejena množica C v $\mathbb{R}^n$ kompaktna.

Ker je C omejena v $\mathbb{R}^n$, leži v neki kocki $K = \prod_1^n I_k$, kjer je $I_k = [a_k, b_k]$. Ker je vsak interval I_k kompakten v $\mathbb{R}$ (trditev 1.7.1), je po trditvi 1.10.6 tudi kocka K kompaktna v $\mathbb{R}^n$. Ker je C zaprta množica v $\mathbb{R}^n$ in je tudi K zaprta v $\mathbb{R}^n$, je C zaprta v K. Po trditvi 1.7.3 je tedaj C kompaktna množica.

□

Za konec razdelka dokažimo še znano Banachovo skrčitveno načelo. To sicer ni topološki izrek, niti se ne nanaša le na kompaktne prostore, obravnava pa obstoj negibnih točk preslikav, take probleme pa bomo obravnavali v poglavju 3.

Definicija. Naj bo M poljuben metrični prostor. Preslikavi $f\colon M \to M$ rečemo *skrčitev*, če obstaja tako pozitivno število $q < 1$, da velja $d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y)$ za poljuben par $x, y \in M$.

Izrek 2.3.5. (Banachovo skrčitveno načelo.) *Če je M poln metrični prostor in je $f\colon M \to M$ skrčitev, obstaja natanko ena* negibna *točka preslikave f, tj. taka točka $a \in M$, da velja $f(a) = a$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da obstaja kvečjemu ena negibna točka. Denimo, da bi obstajali različni točki x in y v M, za kateri bi veljalo $f(x) = x$ in $f(y) = y$. Tedaj nas dejstvo, da je f skrčitev, pripelje do protislovne neenakosti

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y) < d(x, y)\,.$$

Pokažimo še to, da obstaja ena negibna točka. Naj bo x_0 poljubna točka v M. Sestavimo zaporedje z začetno točko x_0, ki ustreza rekurzivni formuli $x_n = f(x_{n-1})$. Če označimo $d(x_0, x_1)$ z D, je $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq qD$. Podobno pokažemo, da je $d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq q^2 D$ in s popolno indukcijo dokažemo, da za vsako naravno število n velja

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n D\,. \tag{2.2}$$

Iz trikotniške neenakosti in neenakosti (2.2) dobimo za poljuben par naravnih števil $m > n$ oceno

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} q^i D \leq D \sum_{i=n}^{\infty} = D \frac{q^n}{1-q}\,.$$

Ta ocena nam pove, da je zaporedje (x_n) Cauchyjevo in ker je prostor M poln, ima to zaporedje limitno točko, imenujmo jo a. Iz rekurzivne formule sledi

$$a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)\,.$$

Točka a je torej negibna točka skrčitve f.

□

Več o zgornjem izreku in njegovem pomenu si lahko preberete v [10].

Vaje.

1. Naj bo (M, d) metrični prostor s trivialno metriko

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x = y, \\ 1, & \text{če je } x \neq y. \end{cases}$$

   Katera zaporedja v tem prostoru so Cauchyjeva?

2. Dokažite, da je vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru Cauchyjevo zaporedje. Poiščite tudi metrični prostor in Cauchyjevo zaporedje v njem, ki ni konvergentno.

3. Dokažite, da je vsak zaprt podprostor polnega metričnega prostora poln metrični prostor.

4. Naj bo (M, d) metrični prostor. Metriko $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ imenujemo standardna omejena metrika prirejena metriki d. Dokažite, da je metrični prostor (M, d) poln natanko tedaj, ko je poln metrični prostor $(M, \bar{d})$.

5. Dokažite, da je vsak prostor $\mathbb{R}^n$ poln tako v produktni, kakor tudi v evklidski metriki.

6. Poiščite metrični prostor, katerega metrika je omejena, ki pa ni totalno omejen prostor. (Namig: primerjajte vajo 6 v razdelku 1.12.)

7. Dokažite, da je metrični prostor (X, d) totalno omejen natanko takrat, ko je totalno omejen v prirejeni omejeni metriki $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$.

8. Naj bo A podprostor polnega metričnega prostora X. Dokažite, da je A totalno omejen natanko tedaj, ko je njegovo zaprtje $\bar{A}$ kompakten prostor.

9. Naj bo $C[X]$ množica Cauchyjevih zaporedij v metričnem prostoru (X, d). Vpeljimo v to množico relacijo $\sim$, definirano s predpisom

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0\,.$$

Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija v $C[X]$.

2.4 Preslikave kompaktnih prostorov

Izrek 2.4.1. *Naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ zvezna preslikava kompaktnega prostora X v realno os. Tedaj je f omejena in zavzame vsaj v eni točki svoj minimum in vsaj v eni točki svoj maksimum.*

Dokaz. Ker je f zvezna , X pa kompakten prostor, je po izreku 1.7.6 tudi $f(X)$ kompaktna množica v $\mathbb{R}$. Torej je $f(X)$ omejena in zato obstajata $\sup f(X)$ in $\inf f(X)$. poleg tega je $f(X)$ zaprta množica in zato je $\sup f(X) \in f(X)$ in $\inf f(X) \in f(X)$.

□

Spomnimo se, da je preslikava $f\colon X \to Y$ metričnega prostora (X, d_X) v metrični prostor (Y, d_Y) enakomerno zvezna, če za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da velja implikacija

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,.$$

Izrek 2.4.2. *Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava kompaktnega metričnega prostora (X, d_X) v metrični prostor (Y, d_Y). Tedaj je f tudi enakomerno zvezna.*

Dokaz. Izberimo si poljuben $\varepsilon > 0$ in definirajmo $\eta = \varepsilon/2$. Ker je f zvezna v vsaki točki, obstaja za vsak $x \in X$ taka odprta krogla $K(x, \delta_x)$ ($\delta_x > 0$), ki se z f preslika v η-okolico slike $f(x)$. Zaradi trikotniške neenakosti to pomeni

$$x_1, x_2 \in K(x, \delta_x) \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < 2\eta\,.$$

Vse odprte krogle $K(x, \delta_x)$, kjer je $x \in X$, tvorijo neko odprto pokritje $\mathcal{K}$ prostora X. Ker pa je X kompakten, obstaja končno podpokritje

$$K(x_1, \delta_{x_1}), \dots, K(x_n, \delta_{x_n})\,.$$

Naj bo δ Lebesguovo število zgornjega pokritja. Vsaka množica premera δ je tedaj vsebovana v neki krogli $K(x_i, \delta_{x_i})$ in je zato premer njene slike manjši od $2\eta = \varepsilon$. Torej je f enakomerno zvezna.

□

Vaji.

1. Poiščite primer funkcije iz poljubnega topološkega prostora X v $\mathbb{R}$, ki je omejena, pa nima ne minimuma, ne maksimuma.

2. Poiščite primer zvezne funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ni enakomerno zvezna.

2.5 Cantorjeva množica

Oglejmo si pomemben primer kompaktnega metričnega prostora, ki ga je konstruiral Georg Cantor in se po njem imenuje *Cantorjeva množica*. Prostor dobimo kot limito neskončnega zaporedja naslednjih korakov:

1. korak: Iz zaprtega intervala $I = [0, 1]$ odstranimo njegovo srednjo tretjino, tj. odprti interval $(1/3, 2/3)$. Tako dobimo množico $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

2. korak: Iz obeh zaprtih intervalov $[0, 1/3]$ in $[2/3, 1]$ odstranimo njuni srednji tretjini, tj. iz prvega odstranimo odprti interval $(1/9, 2/9)$, iz drugega pa odprti interval $(7/9, 8/9)$. Tako dobimo množico $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

Tako sedaj nadaljujemo in dobimo padajoče zaporedje množic $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$, v katerem množico C_n dobimo iz C_{n-1} tako, da v C_{n-1} odstranimo vse srednje »tretjine«. Tako je C_n unija 2^n zaprtih intervalov.

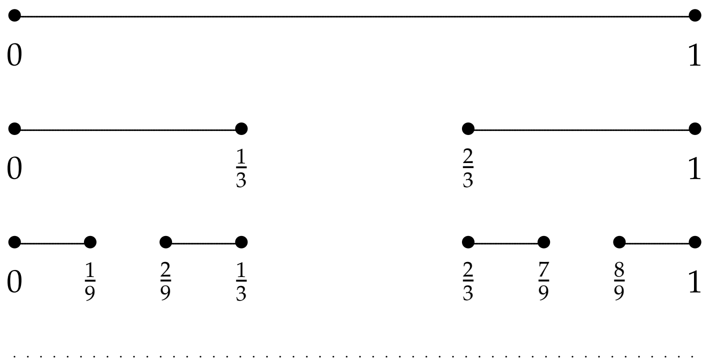
Cantorjevo množico sedaj definiramo kot presek tega zaporedja

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Na množici C vzamemo kar topologijo, ki jo podeduje od realne osi $\mathbb{R}$, na kateri leži. Torej je (C, d) metrični prostor z metriko $d(x, y) = |x - y|$. Očitno je C zaprta podmnožica $\mathbb{R}$, saj je definirana kot presek zaprtih množic C_i. Prav tako je očitno, da je C omejena podmnožica $\mathbb{R}$, saj leži na intervalu $[0, 1]$. Potemtakem je C kompakten prostor.

Definirajmo funkcijo f na Cantorjevi množici s predpisom

$$f(x) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$



Slika 2.1. Konstrukcija Cantorjeve množice

kjer je

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{če } x \text{ leži na nekem lihem intervalu v } C_n, \\ 2, & \text{če } x \text{ leži na nekem sodem intervalu v } C_n. \end{cases}$$

Namreč, če intervale, ki sestavljajo množico C_n oštevilčimo od leve proti desni, lahko govorimo o sodih in lihih intervalih.

Vaji.

1. Pokažite, da zgoraj definirana funkcija f ustreza razvoju realnega števila x v trojiškem sistemu

$$x = a_1(\frac{1}{3}) + a_2(\frac{1}{9}) + a_3(\frac{1}{27}) + \ldots + a_n(\frac{1}{3})^n + \ldots$$

2. Označimo z $D_i = \{0, 2\}$ diskretni prostor z dvema točkama in si poglejmo neskončni produkt

$$D = \prod_{i=1}^{\infty} D_i,$$

ki ga opremimo s produktno topologijo.

Pokažite, da je preslikava $f\colon C \to D$ homeomorfizem. (Namig: Najprej dokažite, da je f bijektivna in zvezna. Nato preverite, da je prostor D kompakten. Ker je prostor C očitno Hausdorffov, sledi da je f homeomorfizem.)

Od tod hitro sledi, da je Cantorjeva množica neštevna, kajti C je ekvipolentna množici vseh zaporedij $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, v katerih so členi a_i bodisi 0 bodisi 2, ta množica pa ima moč kontinuuma $2^{\aleph_0} = c$.

Poglavje 3

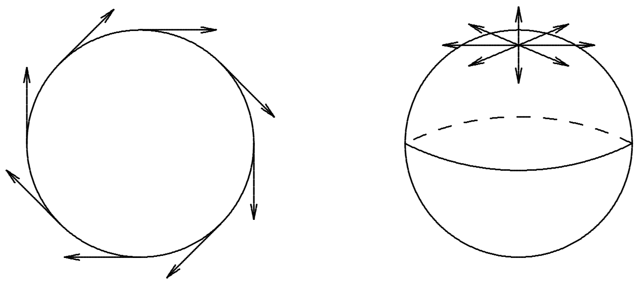
Brouwerjev izrek o negibni točki

V tem poglavju bomo bežno pokukali v zakladnico »globalnih« rezultatov topologije. Dokazali bomo nekaj sorazmerno preprostih, a zelo pomembnih izrekov.

V razdelku 2.3 smo dokazali Banachovo skrčitveno načelo. Za vajo smo pri obravnavi povezanosti v razdelku 1.6 dokazali drugačen izrek o negibni točki: da ima tudi poljubna zvezna preslikava intervala vase negibno točko. V tem poglavju bomo ta izrek posplošili, pokazali bomo, da ima negibno točko vsaka zvezna preslikava poljubne evklidske krogle vase. Poleg tega bomo dokazali tudi to, da sododimenzionalne sfere ne dopuščajo zveznih tangencialnih polj brez ničle. Kot posledico izreka o negibni točki pa dobimo izrek o tem, da ne obstaja zvezna preslikava krogle na njen rob, ki ne bi premaknila točk na robu.

3.1 Izrek o kosmati krogli

V tem razdelku bomo obravnavali obstoj tangencialnih vektorskih polj brez ničel na sferah različnih dimenzij. To se sliši sorazmerno



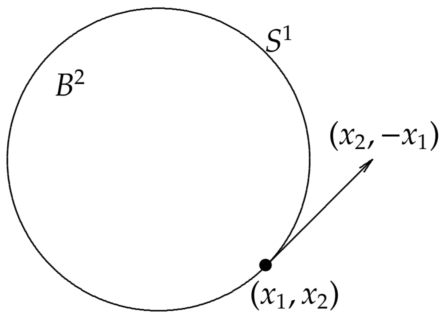
počesana S^1 nepočesana S^2

Slika 3.1. Sferi S^1 in S^2 in tangencialna vektorska polja

zahtevno, ima pa tudi svojo bolj življenjsko plat: za sferi dimenzij 1 in 2 se to namreč precej očitno vidi. Vektorsko polje na sferi si predstavljajmo kot lasje na sferi, tangencialno vektorsko polje pa kot počesane lase. Imejmo torej enakomerno kosmato kroglo. Ali bi jo lahko počesali »zvezno«, tj. tako, da bi dlake ležale na površini krogle ena ob drugi, brez preč ali vrtincev? Kakorkoli razmišljamo ali pa tudi poskušamo, nam to ne bo uspelo. Če pa bi imeli v ravnini enakomerno kosmato krožnico, bi jo brez težav »zvezno« počesali.

Pokazali bomo, da je »počesljivost« odvisna od sodosti oziroma lihosti dimenzije sfere. Seveda ne bomo uporabljali frizerskega jezika, ampak matematičnega: namesto o dlakah bomo govorili o vektorskih poljih, namesto o »zveznem« česanju pa o obstoju zveznih tangencialnih vektorskih poljih.

Definicija. Zvezni preslikavi $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^m$, rečemo *(zvezno) vektorsko polje* na D.



Slika 3.2. Zvezno tangencialno vektorsko polje brez ničle na S^1

Če je S^{m-1} enotske sfera s središčem v izhodišču $0 \in \mathbb{R}^m$ in je vektor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ pravokoten na x, tj.

$$\langle f(x), x \rangle = 0\,,$$

za vsak $x \in S^{m-1}$, kjer je $\langle f(x), x \rangle$ skalarni produkt vektorjev $f(x)$ in x v $\mathbb{R}^m$, rečemo, da je f *tangencialno vektorsko polje* na sferi S^{m-1}.

Če se povrnemo k vprašanju obstoja tangencialnih vektorskih polj brez ničle na sferah, lahko za lihodimenzionalne sfere kar takoj najdemo kakšno tako polje. Naj bo $S = S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ enotska sfera, vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ pa krajevni vektor poljubne točke na sferi S. Tedaj je

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1}) \tag{3.1}$$

zvezno tangencialno vektorsko polje na sferi S. Za vsak $x \in S$ je $\|f(x)\| = 1$, torej $f(x) \neq 0$ za vsak x.

Ta del posla smo torej zlahka opravili, malo več dela pa bo z dokazom, da sododimenzionalne sfere ne dopuščajo nobenega zveznega tangencialnega vektorskega polja brez ničle.

Izrek 3.1.1. *Vsako zvezno tangencialno vektorsko polje na enotski sferi* S^{2n} *v* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *ima vsaj eno ničlo.*

Enotska sfera S^{2n-1} *v* $\mathbb{R}^{2n}$ *pa dopušča zvezna tangencialna vektorska polja brez ničle.*

Dokaz. Dokazovali bomo le prvo trditev, drugo smo že dokazali (za vajo preverite, da je zgoraj definirano tangencialno polje (3.1 zvezno)).

Označimo točke na enotski sferi $S = S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ z $u = (u_1, \ldots, u_{2n+1})$. Naj bo $w(u)$ zvezno neničelno tangencialno vektorsko polje na S. Ker je neničelno, lahko iz njega naredimo zvezno tangencialno vektorsko polje

$$v(u) = \frac{1}{\|w(u)\|} w(u)\,,$$

katerega vektorji imajo vsi dolžino ena.

Pa recimo, da obstaja na S zvezno tangencialno vektorsko polje $v(u)$ z enotsko dolžino. Pokazali bomo, da nas to pripelje do protislovja. Za začetek dokaza privzemimo, da je polje $v(u)$ zvezno odvedljivo (kasneje bomo pokazali, da tega pravzaprav ne potrebujemo).

V prvem koraku bomo razširili naše polje v na odebeljeno sfero

$$D = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1}; 1/2 \le \|x\| \le 3/2\}\,,$$

ki sfero S obdaja z obeh strani. Polje v bomo razširili na D po »žarkih«: vsaka točka v D se lahko na en sam način zapiše kot ru, kjer je $u \in S$ in $r \in [1/2, 3/2]$; definirajmo

$$v(ru) = rv(u)\,.$$

Tako smo dobili vektorsko polje na D, za katerega še vedno velja

$$\langle x, v(x)\rangle = 0\,, \qquad \|v(x)\| = \|x\| = r$$

in tudi to polje je zvezno odvedljivo na D (vaja!).

Naj bo t neko dano realno število in definirajmo na D zvezno odvedljivo preslikavo

$$P\colon x \longmapsto x + tv(x)\,,$$

ki preslika D v neko množico $D_t \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Pokazali bomo, da je za po absolutni vrednosti dovolj majhne t preslikava P bijekcija na drugo odebeljeno sfero D_t. Najprej pokažimo injektivnost te preslikave. Ker je polje $v(x)$ zvezno odvedljivo na kompaktnem prostoru D, obstaja tako pozitivno število λ, da velja

$$\|v(x) - v(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$$

za katerakoli $x, y \in D$. Če bi se točki x in y preslikali s P v isto točko

$$x + tv(x) = y + tv(y)\,,$$

bi veljalo

$$\|x - y\| = |t|\,\|v(y) - v(x)\| \leq |t|\lambda\|x - y\|\,.$$

Če je $|t| < 1/\lambda$, je to možno le, če je $x = y$ in za take t je naša preslikava P injektivna.

Pokažimo še, da je P surjekcija na odebeljeno sfero D_t. V ta namen najprej pokažimo, da je D_t res odebeljena sfera. Če je $\|x\| = r$, velja po Pitagorovem izreku

$$\|x + tv(x)\| = r\sqrt{1 + t^2}\,,$$

ker sta vektorja x in $v(x)$ pravokotna in imata oba dolžino r. Zožitev preslikave P na sfero s polmerom r in središčem v izhodišču preslika to sfero v sfero s polmerom $r\sqrt{1+t^2}$ in središčem v izhodišču. S tem, da bomo pokazali surjektivnost vsake take zožitve preslikave P, bomo dokazali surjektivnost preslikave P.

Za vsak vektor s z lastnostjo $\|s\| = \sqrt{1+t^2}\,\|x\|$ moramo torej pokazati, da je rešljiva enačba

$$x + tv(x) = s\,, \tag{3.2}$$

kjer je $1/2 \le \|x\| \le 3/2$.

Naj bo najprej $\|s\| = 1$. Enačbo (3.2) prepišimo v obliko

$$x = s - tv(x)\,.$$

Desno stran $x = s - tv(x)$ gledamo kot funkcijo, ki preslika odebeljeno sfero D nase, če je le $|t| < 1/3$, saj v tem primeru velja

$$\|tv(x)\| < 1/3\|v(x)\| = 1/3r \le 1/2$$

in zato

$$1/2 = \|s\| - 1/2 \le \|s - tv(x)\| \le \|s\| + 1/2 = 3/2\,.$$

Če je tudi $|t| < 1/\lambda$, je

$$\|tv(x) - tv(y)\| \le |t|\lambda\|x - y\|$$

in je preslikava $s - tv(x)$ skrčitev na D. Torej ima po Banachovem skrčitvenem načelu 2.3.5 negibno točko, ki reši tudi enačbo (3.2), če je $\|s\|=1$. Če pa je $\|s\| \ne 1$, definirajmo enotski vektor

$$s_1 = s/\|s\|\,,$$

zanj dobimo rešitev x_1 enačbe

$$x_1 + tv(x_1) = s_1$$

in če to enačbo pomnožimo z s, dobimo rešitev $x = \|s\|x_1$ enačbe (3.2). S tem smo dokazali, da za dovolj majhne t (take, da je $|t|$ manjša od $1/3$ in manjša od $1/\lambda$) preslikava P preslika odebeljeno sfero D bijektivno na odebeljeno sfero D_t.

Oglejmo si prostornino odebeljene sfere D_t. Ker je D_t pravzaprav le za faktor $\sqrt{1+t^2}$ napihnjena odebeljena sfera $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, za njeno prostornino velja

$$\operatorname{vol} D_t = (1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} \operatorname{vol} D \,. \tag{3.3}$$

Lahko pa izrazimo to prostornino tudi analitično. Ker preslikava P preslika D zvezno bijektivno na D_t, velja po izreku o uvedbi novih spremenljivk v integralu enakost

$$\operatorname{vol} D_t = \int \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \ldots dx_{2n+1} \,,$$

če je determinanta Jacobijeve matrike pozitivna. Pri tem integriramo po D in sliko vektorja $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$ pri preslikavi P označimo s

$$P(x) = (P_1(x), \ldots, P_{2n+1}(x)) \,.$$

Iz

$$P(x) = x + tv(x)$$

sledi, da je Jacobijeva matrika preslikave P enaka

$$\left(\frac{\partial P_i}{x_j}\right) = \left(\delta_{ij} + t\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \qquad i, j = 1, \ldots, 2n+1 \,, \tag{3.4}$$

kjer je δ_{ij} Kroneckerjev simbol, ki je enak 1, če je $i = j$, sicer pa je 0. Če gre t proti 0, gre torej Jacobijeva matrika proti identični matriki in tako njena determinanta proti 1.

Kot funkcija parametra t je vsak element Jacobijeve matrike (3.4) linearna funkcija in je zato determinanta Jacobijeve matrike polinom stopnje $2n+1$

$$\det\left(\frac{\partial P_i}{x_j}\right) = 1 + a_1(x)t + \cdots + a_{2n+1}(x)t^{2n+1}\,.$$

Ko to integriramo po D, dobimo za prostornino neki drugi polinom

$$\operatorname{vol} D_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{2n+1}t^{2n+1}\,,$$

kjer je b_k integral funkcije $a_k(x)$ po D. S tem pa smo prišli do protislovja, saj je po (3.3) $\operatorname{vol} D_t = \operatorname{vol} D(\sqrt{1+t^2})^{2n+1}$, to pa ni polinom spremenljivke t. Torej smo pokazali, da enotska sfera v $\mathbb{R}^{2n+1}$ ne dopušča zvezno odvedljivega tangencialnega vektorskega polja brez ničle.

Pokažimo še, da predpostavka o zvezni odvedljivosti ni potrebna. Naj bo zdaj $v(x)$ neko zvezno tangencialno vektorsko polje brez ničle na enotski sferi $S \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Pokazali bomo, da lahko iz njega konstruiramo zvezno odvedljivo tangencialno vektorsko polje brez ničle $w(x)$ na S.

Najprej razširimo polje v na ves prostor $\mathbb{R}^{2n+1}$ s predpisom

$$v(rx) = rv(x)\,, \qquad r \geq 0\,, \quad \|x\| = 1\,.$$

Zdaj se osredotočimo na zaprto kocko $Q = [-1,1]^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Na njej lahko poljubno dobro aproksimiramo vsako komponento $v_i(x_1,\ldots,x_{2n+1})$ z nekim polinomom $p_i(x_1,\ldots,x_{2n+1})$. Kocka Q seveda vsebuje enotsko sfero, zato na njej obstaja vektorsko polje $p = (p_1,\ldots,p_{2n+1})$, ki je poljubno blizu v. Ni pa rečeno, da je polje p tangencialno na sfero. To bomo popravili v naslednjem koraku.

Polje $p = (p_1,\ldots,p_{2n+1})$ blizu v si lahko izberemo tako blizu polja v, da velja

$$w = p - \langle p, x\rangle x \neq 0\,, \qquad \|x\| = 1\,,$$

saj gre tako definirano polje w proti v, če gre p proti v. Poleg tega je po konstrukciji polje w tangencialno

$$\langle p - \langle p, x\rangle, x\rangle = \langle p, x\rangle - \langle p, x\rangle\langle x, x\rangle = 0\,.$$

Ker nas obstoj polja w spet privede do protislovja, smo s tem dokazali naš izrek: enotska sfera $S \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ ne dopušča zveznega tangencialnega vektorskega polja brez ničle.

□

3.2 Brouwerjev izrek

V tem razdelku bomo dokazali Brouwerjev izrek o negibni točki. Za razliko od Banachovega skrčitvenega načela 2.3.5, tu za preslikavo zahtevamo le zveznost. Cena, ki jo za to plačamo, pa je dvojna: izrek potem velja le za nekatere prostore (tiste, ki so homeomorfni enotski krogli v kakšnem evklidskem prostoru) in tudi dokaz ni konstruktiven – pove nam, da negibna točka obstaja, ne pove pa, kako jo najti.

Obstaja veliko različnih dokazov za Brouwerjev izrek. Mi bomo sledili Franklinovi interpretaciji Milnorjevega dokaza [4], ki je sorazmerno kratek in nazoren, uporablja pa predznanje iz analize.

Izrek 3.2.1. (Brouwerjev izrek.) *Naj bo $B^n \subset \mathbb{R}^n$ enotska krogla v n-dimenzionalnem evklidskem prostoru. Tedaj za poljubno zvezno funkcijo $f\colon B^n \to B^n$ obstaja vsaj ena* negibna točka*, tj. taka točka $x \in B^n$, da velja $f(x) = x$.*

Dokaz. Denimo, da izrek ne velja, tj. da obstaja taka preslikava $f\colon B^n \to B^n$, ki nima negibne točke. Označimo z $y = f(x)$ sliko točke x in si oglejmo vektorsko polje $z = x - y$ na B^n. Po predpostavki f

nima negibne točke, zato polje z na vsem B^n nima ničle. Pokažimo, da na sferi $S = S^{n-1} = \partial B^n$ polje z kaže ven iz B^n:

$$\langle x, z\rangle = \langle x, x - y\rangle = 1 - \langle x, y\rangle \qquad \text{za } \|x\| = 1 \tag{3.5}$$

zaradi neenakosti

$$0 < \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \leq 2 - 2\langle x, y\rangle\,, \tag{3.6}$$

je $\langle x, z\rangle > 0$ za vsak $x \in B^n$.

Zdaj bomo polje z »počesali na krtačko«: naredili bomo drugo vektorsko polje w, ki bo tudi zvezno, povsod na B^n različno od 0, na sferi S pa bo v vsaki točki x kar enako zunanji normali $w = x$. Definirajmo

$$w = x - \lambda y\,, \qquad \lambda = \frac{1 - \langle x, x\rangle}{1 - \langle x, y\rangle}\,.$$

Imenovalec v definiciji λ je povsod različen od 0 zaradi neenakosti (3.6).

Na sferi S je skalarna funkcija λ enaka 0 in je zato na S res $w(x) = x$.

Pokažimo še neničelnost polja w. Recimo, da bi v neki točki x veljalo $w(x) = 0$. Tedaj lahko pomnožimo enakost

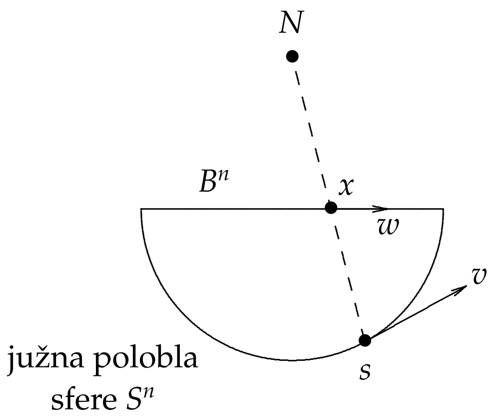
$$0 = w = x - \lambda y$$

z $\langle x, y\rangle$ in upoštevamo, kaj je λ, in dobimo enakost

$$0 = (1 - \langle x, y\rangle)x - (1 - \langle x, x\rangle)y\,. \tag{3.7}$$

Iz $w = 0$ pa sledi tudi $x = \lambda y$, odtod pa

$$\langle x, y\rangle x = \lambda^2\langle y, y\rangle y = \langle x, x\rangle y\,.$$



Slika 3.3. Projekcija vektorskega polja

Enakost prvega in zadnjega izraza pove, da iz (3.7) sledi $0 = x - y$ ali $y = x$, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Torej velja $w \neq 0$ na vsem B^n.

Zdaj pa bomo »prenesli« vektorsko polje w s stereografsko projekcijo s krogle B^n, ki jo gledamo kot ekvatorski krog krogle B^{n+1}, na sfero $S^n = \partial B^{n+1}$. Najprej bomo določili to vektorsko polje na južni polobli. Idejo, kako bomo to naredili, nam da slika 3.3.

Vsako točko x iz B^n s stereografsko projekcijo preslikamo v točko s na južni polobli sfere S^n, vektor $w(x)$ nam določa neko pot (ali začetek neke poti) v B^n, to pot spet preslikamo s stereografsko projekcijo. Dobimo neko pot, tj. krivuljo na sferi S^n in zato nam odvod preslikane poti v začetni točki s določi neki tangencialni vektor na S^n v točki s. Tako dobimo ustrezno zvezno tangencialno vektorsko polje na južni polobli.

Zgoraj smo nakazali, kako bomo iz vektorskega polja w na B^n dobili zvezno vektorsko polje na južni polovici sfere S^n, naredimo zdaj to še čisto konkretno s koordinatami.

Točko $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ identificiramo s točko $(x_1, \ldots, x_n, 0)$ v B^{n+1} (to pomeni, da imamo B^n za ekvatorski krog v B^{n+1}). Severni pol pa je v koordinatah $N = (0, \ldots, 0, 1) \in B^{n+1}$. Ker je slika $s = s(x) \in S^n$ določena s tem, da je x na daljici med s in N, velja

$$x = (1 - \theta)N + \theta s \tag{3.8}$$

za neki $\theta = \theta(x)$, $0 < \theta < 1$. V koordinatah to pomeni

$$\begin{aligned} x_i &= \theta s_i \qquad\qquad (\text{za } i = 1, \ldots, n) \\ 0 &= (1 - \theta) + \theta s_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Z vrednostmi x_i so določene vrednosti s_i in θ. Velja:

$$s_i = x_i/\theta \quad (\text{ za } i = 1, \ldots, n) \qquad \text{in} \qquad s_{n+1} = (\theta - 1)/\theta \,,$$

poleg tega pa zaradi $\|s\| = 1$ dobimo

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} s_i^2 = (x_1/\theta)^2 + \cdots + (x_n/\theta)^2 + (\theta - 1)^2/\theta^2 \,,$$

to pomnožimo s θ^2 in odtod dobimo še

$$\theta = 1/2(\|x\|^2 + 1) \,. \tag{3.9}$$

S tem smo podrobno opisali stereografsko projekcijo, to je preslikavo B^n na južno poloblo sfere S^n, zdaj pa s pomočjo vektorskega polja $w(x)$ na B^n konstruirajmo zvezno tangencialno vektorsko polje $v(s)$ na južni polobli sfere S^n.

Naj bo najprej $\|x\| < 1$. Tedaj lahko s pomočjo vektorja $w = w(x)$ konstruiramo neko kratko daljico

$$x(t) = x + tw(x) \,, \qquad 0 \le t \ll 1 \,,$$

katere začetek je v točki $x(0) = x$ in gre v smeri vektorja w. Če to daljico stereografsko projiciramo na južno poloblo sfere S^n, dobimo tam neki lok

$$s(t) = s(x + tw(x))$$

Vektor $v = v(s)$ definirajmo kot odvod funkcije $s(t)$ po t:

$$v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(t)\,.$$

Ker je $\|s(t)\| = 1$ za vsak t dobimo z Leibnizevim pravilom za odvajanje skalarnega produkta

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle s(t), s(t)\rangle = 2\langle v, s\rangle\,,$$

odtod pa sledi, da je vektor v tangencialen na sfero S^n.

Pokažimo še, da vektorsko polje v (ki smo ga zaenkrat definirali le na južni polobli brez ekvatorja) nima ničle. Za stereografsko projekcijo daljice $x(t)$ velja

$$x(t) = (1 - \theta(t))N + \theta(t)s(t)\,,$$

odtod dobimo za odvod po t v točki $t = 0$ enakost

$$w = -\dot{\theta}N + \dot{\theta}s + \theta v\,.$$

Vektor v je tedaj

$$v = \frac{w + \dot{\theta}(N - s)}{\theta}\,.$$

Če je $\dot{\theta} = 0$, je $v \neq 0$, ker je $w \neq 0$. Če pa $\dot{\theta} \neq 0$, je $v \neq 0$, saj za njeno $(n + 1)$-vo koordinato velja

$$v_{n+1} = \frac{0 + \dot{\theta}(1 - s_{n+1})}{\theta} \neq 0\,, \tag{3.10}$$

ker je $w_{n+1} = 0$ in $s_{n+1} < 0$ (saj gledamo južno polobl brez ekvatorja!).

Razširimo naše polje v še na ekvator, tj. na $\partial B^n \subset S^n$, in to tako, da bo še vedno zvezno, tangencialno in brez ničle. Ker je ekvator rob južne poloble, pravzaprav sploh nimamo izbire: če naj bo to polje zvezno tudi na ekvatorju, je z vrednostmi na južni polobli že določena tudi njegova vrednost na ekvatorju, ali pa se na ekvator sploh ne da razširiti zvezno. Poglejmo si, kaj se zgodi s s, če se bližamo ekvatorju, kjer je $s_{n+1} = 0$. Glede na enakost (3.8) se to zgodi tedaj, ko gre $\|x\|$ in z njim tudi θ proti 1, pri tem gre seveda razlika $x - s$ proti nič. V tem primeru dobimo v limiti na ekvatorju ($\|x\| = 1$) iz enakosti (3.10)

$$v = (w + \dot{\theta}(N - x))\,. \tag{3.11}$$

Spomnimo se, da smo konstruirali polje w tako, da je na robu diska B^n, tj. za $\|x\| = 1$, kar radialno: $w = x$. Tedaj dobimo iz enakosti (3.9)

$$\dot{\theta} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{2}(1 + \langle x, x\rangle) = \langle w, x\rangle = 1\,.$$

Za vektorsko polje v na robu ∂B^n tedaj dobimo iz enakosti (3.11)

$$v = (x + N - x) = N\,.$$

Na ekvatorju torej kaže polje v navzgor, polje v smo torej definirali zvezno na vsej zaprti južni polobli, na njej je tangencialno in povsod različno od nič.

Iz polja w, ki obstaja po predpostavki, smo dobili na južni polobli sfere S^n zvezno tangencialno vektorsko polje v brez ničle . Kaj bi dobili, če bi na tak način kot na južno polobl o, s stereografsko projekcijo iz južnega pola konstruirali vektorsko polje na severni polobli? Zaradi simetrije bi dobili prav tako neko zvezno tangencialno vektorsko polje brez ničle, označimo ga z u, ki pa bi na ekvatorju kazalo navzdol. Če bi torej na južni polobli vzeli polje v, na severni polobli pa u, ga na ekvatorju ne bi mogli zvezno definirati! Namesto polja u vzamemo torej na severni polobli $-u$, tedaj se v in $-u$ na ekvatorju ujemata in na S^n smo dobili zvezno tangencialno vektorsko polje, ki nima ničle.

Toda po izreku o kosmati krogli 3.1.1 sododimenzionalne sfere ne dopuščajo zveznega tangencialnega vektorskega polja brez ničle. Naša predpostavka o zvezni preslikavi $B^n \to B^n$ brez negibne točke nas je pripeljala do protislovja za sode n in s tem smo izrek o negibni točki za sode n že dokazali.

Kaj pa za lihodimenzionalne krogle? Zanje bomo izrek dokazali tako, da bomo dokazali, da obstoj negibne točke za preslikave $B^{n+1} \to B^{n+1}$ implicira obstoj negibne točke za preslikave $B^n \to B^n$.

Imejmo zvezno preslikavo $f\colon B^n \to B^n$, kjer je n liho število. Definirajmo njeno razširitev $g\colon B^{n+1} \to B^{n+1}$ s predpisom

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), 0)\,.$$

Preslikava g je torej kompozitum projekcije $B^{n+1} \to B^n$ in preslikave f. Ker je g preslikava sododimenzionalne krogle vase, ima negibno točko, ker pa je slika preslikave g enaka B^n, mora biti negibna točka v B^n. Na B^n pa se g in f ujemata, torej je negibna točka za g tudi negibna točka za f. Izrek je v celoti dokazan.

□

3.3 Krogla in njen rob

V tem kratkem razdelku dokažimo neko enostavno posledico Brouwerjevega izreka, ki pa je tako pomembna, da je vredna svojega razdelka.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in A poljuben podprostor v X. Podprostor A imenujemo *retrakt* prostora X, če obstaja kakšna taka zvezna preslikava (ki ji rečemo *retrakcija*) $f\colon X \to A$, katere zožitev $f\big|_A$ na A je identiteta.

Primera.

1. Preprost primer retrakcije je projekcija $p\colon I \times I \to I \times \{0\}$, $p(x,y) = (x,0)$.
2. Krožnica je retrakt kroga brez izhodišča: naj bo retrakcija

   $$R\colon B^2 \setminus \{0\} \to \partial B^2, \quad R(r,\varphi) = (1,\varphi),$$

   kjer smo uporabili polarne koordinate.

$\diamond$

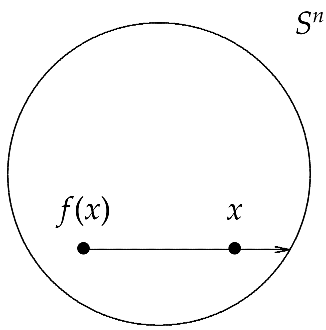
S pomočjo Brouwerjevega izreka lahko dokažemo naslednji izrek.

Izrek 3.3.1. *Sfera S^n ni retrakt krogle B^{n+1}.*

Dokaz. Denimo, da bi obstajala retrakcija $f\colon B^{n+1} \to S^n$. Funkciji $a\colon S^n \to S^n$, $a(x) = -x$, rečemo *antipodna preslikava* . Za antipodno preslikavo zlahka pokažemo, da je zvezna in nima nobene negibne točke. Kompozitum $af\colon B^{n+1} \to S^n$ je tedaj preslikava, ki nima negibne točke, saj negibna točka očitno ne more biti iz notranjosti krogle B^{n+1}, na robu pa je $af = a$, ki tudi nima negibne točke. To pa je v protislovju z izrekom 3.2.1.

$\square$

Omenimo, da je zgornji izrek ekvivalenten Brouwerjevemu izreku 3.2.1. To, da iz Brouwerjevega izreka sledi zgornji izrek smo



Slika 3.4. Preslikava brez negibne točke bi dala retrakcijo

pokazali v dokazu. Dokaz, da tudi iz zgornjega izreka sledi Brouwerjev izrek temelji na naslednji ideji: če bi $f : B^{n+1} \to B^{n+1}$ bila preslikava brez negibne točke, bi preslikava $r : B^{n+1} \to S^n$, ki točki $x \in B^{n+1}$ priredi točko $r(x)$, ki je na presečišču poltraka, ki gre iz $f(x)$ skozi x in sfere S^n, retrakcija.

Vaja. Dokažite, da je antipodna preslikava $a : S^n \to S^n$, $a(x) = -x$, zvezna funkcija, ki nima negibne točke.

Poglavje 4

Ploskve

V tem poglavju bomo spoznali najpreprostejše primere topoloških mnogoterosti, to so ploskve. (Še preprostejša je krožnica, ki je edina sklenjena 1–mnogoterost.) Pri obravnavi tega zanimivega primera topoloških prostorov se bomo zgledovali po Masseyu [6].

4.1 Primeri ploskev

Definicija. Ploskev je separabilen metrični prostor N z lastnostjo, da za vsako točko $x \in M$ obstajata okolica U in bodisi homeomorfizem $h\colon (U, x) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ bodisi homeomorfizem $h\colon (U, x) \to (\mathbb{R}^2_+, 0)$, kjer smo z $\mathbb{R}^2_+$ označili zgornjo (zaprto) polravnino: $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y);\ y \geq 0\}$. V prvem primeru se x imenuje *notranja* točka, v drugem primeru pa *robna* točka ploskve N. Če ploskev nima roba, je pa povezana in kompaktna, se imenuje *sklenjena*.

Oglejmo si nekatere sklenjene ploskve v $\mathbb{R}^3$. Dobro že poznamo sfero $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$. Pomemben primer sklenjene ploskve je tudi torus. To je topološki prostor, ki je homeomorfen produktu

$S^1 \times S^1$, konkreten primer v $\mathbb{R}^3$ je

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Za vajo lahko dokažete, da je torus homeomorfen kvocientnemu prostoru, ki ga dobimo iz pravokotnika z identifikacijo nasprotnih robov kot v razdelku 1.11.

Mimogrede omenimo tudi projektivno ravnino, ki jo tudi dobimo iz pravokotnika z identifikacijo kot v razdelku 1.11.

Znano je, da projektivne ravnine ni mogoče vložiti v $\mathbb{R}^3$. Po drugi strani je sfera očitno podmnožica $\mathbb{R}^3$. Odtod sledi, da projektivna ravnina ni homeomorfna niti sferi niti katerikoli drugi ploskvi, ki leži v $\mathbb{R}^3$. Velja še več – sfera je primer dvostranske ploskve, medtem ko je projektivna ravnina zgled za enostransko ploskev.

Trditev 4.1.1. *Če nalepimo disk na Möbiusov trak tako, da rob diska enkrat »obhodi« rob Möbiusovega traku, dobimo projektivno ravnino.*

Dokaz. Glej sliko 4.1 na sosednji strani!

□

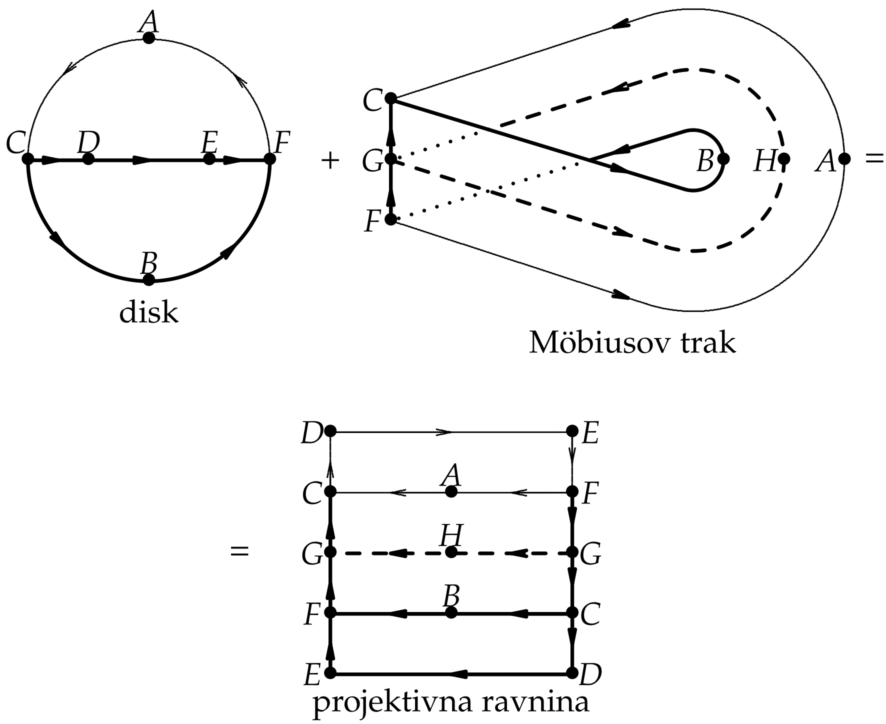
Iz dveh ploskev lahko naredimo novo s posebno operacijo, ki se ji reče povezana vsota.

Definicija. Naj bosta N_1 in N_2 disjunktni ploskvi, na njih izberimo poljubni množici $D_i \subset N_i$, $i = 1, 2$, ki sta homeomorfni standardnemu disku

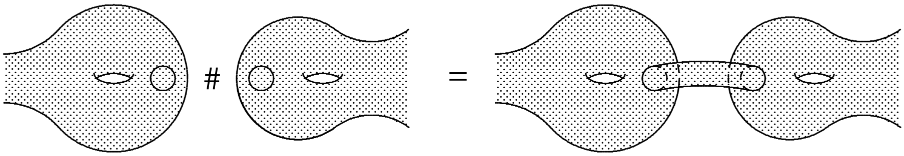
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Naj N_i' pomeni komplement od notranjosti D_i v N_i. Izberimo si homeomorfizem h iz roba diska D_1 na rob diska D_2. Tedaj je *povezana vsota* $N_1 \sharp N_2$ ploskev N_1 in N_2 kvocientni prostor

$$N_1 \sharp N_2 = N_1 \cup_h N_2 = (N_1 \sqcup N_2)/\sim,$$



Slika 4.1. Projektivna ravnina



Slika 4.2. Povezana vsota

kjer je ekvivalenčna relacija $\sim$ na $N_1 \sqcup N_2$ definirana s predpisom $x \sim h(x)$ za $x \in \partial D_1$, ostale točke množice $N_1 \sqcup N_2$ pa so v relaciji $\sim$ le same s sabo.

Tu bi morali dokazati, da je ta definicija res neodvisna od izbire diskov in homeomorfizma med njunima robovoma, a bomo to zaenkrat opustili.

Vaja. Kaj je $N_1 \sharp N_2$, če je N_2 sfera S^2?

Trditev 4.1.2. *Povezana vsota dveh projektivnih ravnin je homeomorfna Kleinovi steklenici.*

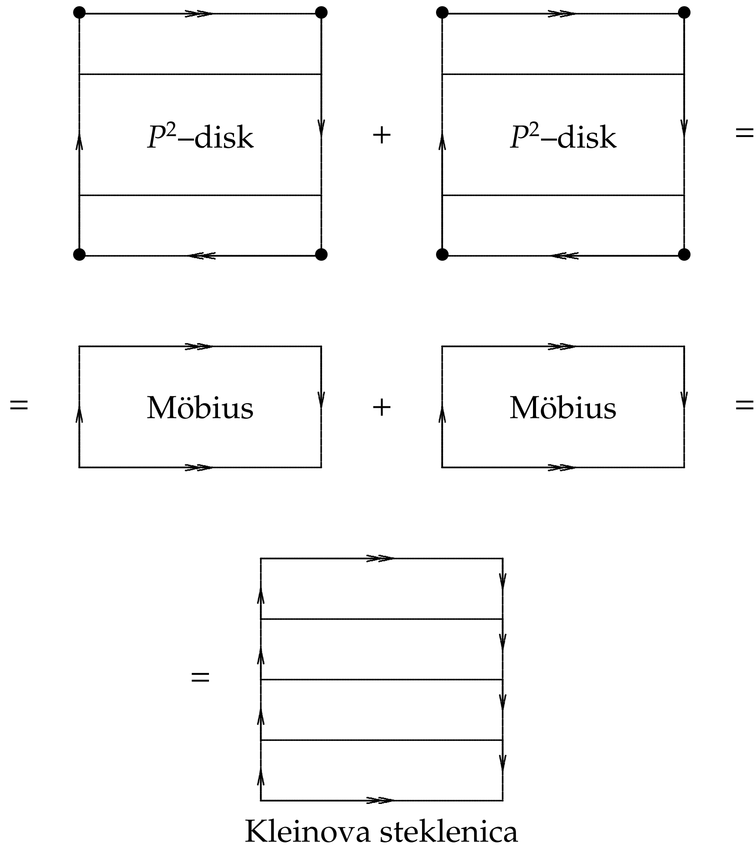
Dokaz. Glej sliko 4.3 na naslednji strani!

□

4.2 Klasifikacija ploskev

V tem razdelku bomo skicirali dokaz naslednjega izreka.

Izrek 4.2.1. *Vsaka sklenjena ploskev v $\mathbb{R}^3$ je homeomorfna povezani vsoti sfere S^2 z nekim končnim številom torusov T.*



Slika 4.3. Kleinova steklenica

Povezani vsoti

$$S^2 \sharp \underbrace{T \sharp T \sharp \ldots \sharp T}_{n} \quad \textit{in} \quad S^2 \sharp \underbrace{T \sharp T \sharp \ldots \sharp T}_{m}$$

sta homeomorfni natanko tedaj, ko je $m = n$.

Definicija. *Triangulacija* kompaktne ploskve N je taka končna družina zaprtih množic Δ_i, katerih unija je N, skupaj s tako družino homeomorfizmov

$$h_i \colon \Delta_i' \xrightarrow{\cong} \Delta_i \subset N\,,$$

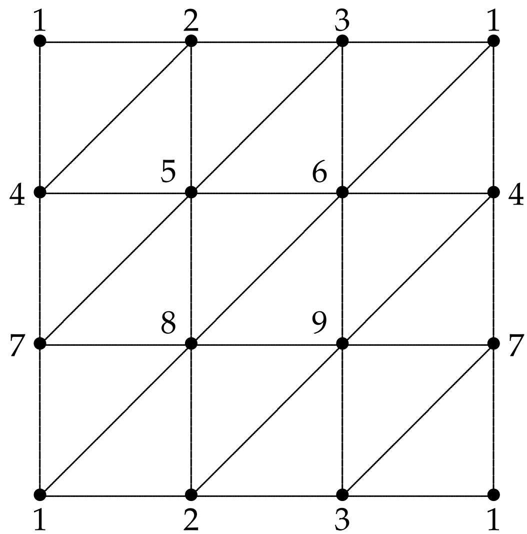
kjer so Δ_i' trikotniki v $\mathbb{R}^2$, da se dva »trikotnika« Δ_i in Δ_j sekata ali v skupnem robu (tj. v h_i-sliki neke stranice od Δ_i', ki je hkrati tudi h_j-slika neke stranice od Δ_j') ali v skupnem oglišču ali pa se ne sekata. Nasploh bomo tudi množice Δ_i imenovali trikotnike, h_i-slikam stranic trikotnikov Δ_i' bomo rekli robovi, h_i-slikam oglišč teh trikotnikov pa vrhovi.

Množice Δ_i si lahko predstavljamo kot krivočrtne trikotnike, ki se na ploskvi stikajo samo v stranicah in ogliščih. Na slikah 4.4 in 4.5 si oglejmo primera triangulacij ploskev.

Brez dokaza povejmo, da se da vsaka sklenjena ploskev triangulirati. Pri tem za vsak rob velja, da je rob natanko dveh trikotnikov in za vsak vrh v triangulacije ploskve velja, da lahko trikotnike, ki vsebujejo v, zvrstimo ciklično $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ tako, da imata sosednja natanko en skupni rob.

Naj bo N triangulirana sklenjena ploskev. Naj bo v število vrhov ploskve N, r naj bo število robov, t pa število trikotnikov te triangulacije. Tedaj je *Eulerjeva karakteristika*

$$\chi(N) = v - r + t\,.$$



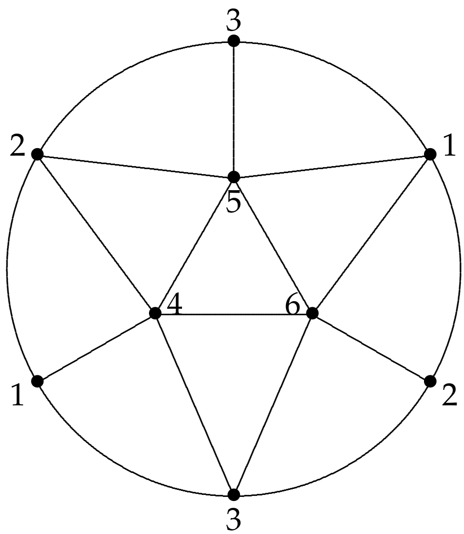
Slika 4.4. Triangulacija torusa

Kasneje bomo pokazali, da je Eulerjeva karakteristika topološka invarianta (tj. da imata homeomorfna topološka prostora isto Eulerjevo karakteristiko) in tako ni odvisna od triangulacije. Dokažimo pa naslednjo trditev.

Trditev 4.2.2. *Naj bosta N_1 in N_2 sklenjeni ploskvi. Za Eulerjevo karakteristiko povezane vsote velja*

$$\chi(N_1 \sharp N_2) = \chi(N_1) + \chi(N_2) - 2\,.$$

Dokaz. Naj bosta N_1 in N_2 triangulirani in konstruirajmo njuno povezano vsoto tako, da jima odstranimo notranjosti po enega trikotnika in potem primerno identificiramo robove in vrhove teh dveh triko-



Slika 4.5. Triangulacija projektivne ravnine

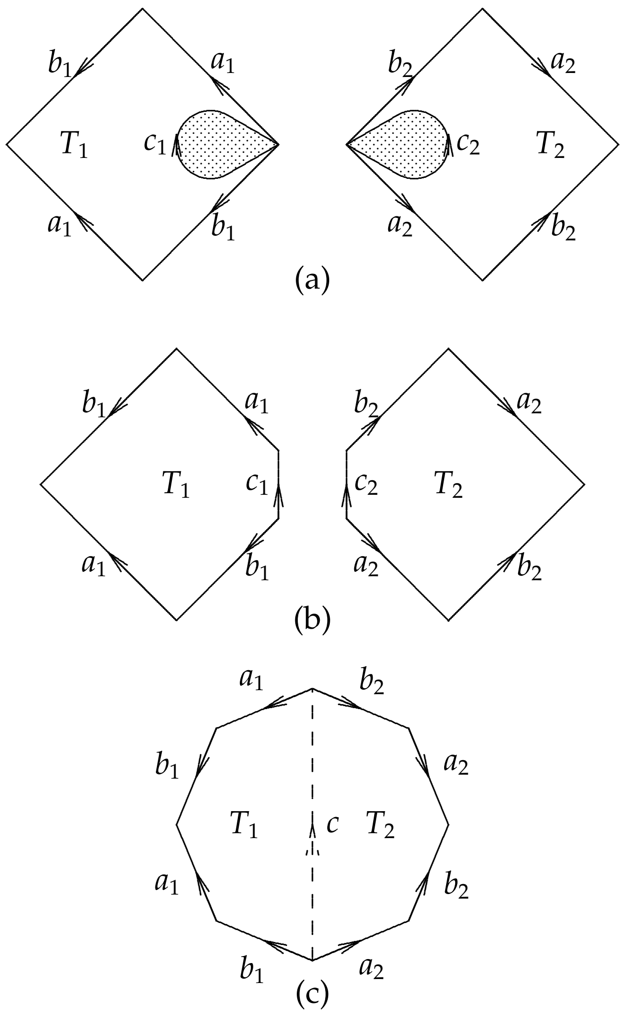
tnikov. Odstranili smo torej dva trikotnika, tri robove in tri vrhove, torej res dobimo zgornjo formulo.

□

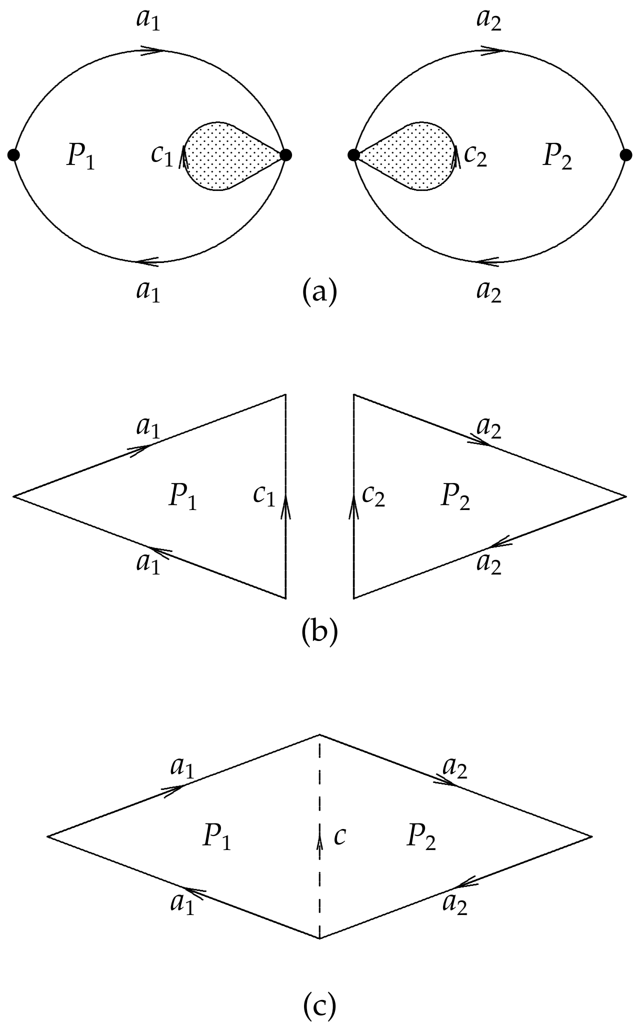
Preden se lotimo dokaza izreka 4.2.1, si oglejmo še, kako lahko izrazimo povezano vsoto torusov kot kvocientni prostor nekega poligona.

Poglejmo si še, kako izrazimo povezano vsoto projektivnih ravnin kot kvocientni prostor poligona.

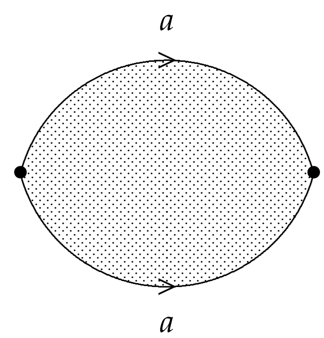
Vsakega od teh poligonov lahko natanko določimo z zapisom njegovih robov tako, da robove, ki jih identificiramo, označimo z isto črko. Pri tem pazimo tudi na smeri identifikacije. To naredimo tako,



Slika 4.6. Povezana vsota dveh torusov



Slika 4.7. Povezana vsota dveh projektivnih ravnin



Slika 4.8. Sfera

da začnemo v poljubnem oglišču poligona in gremo po njegovih stranicah naokrog; če gremo po stranici v njeni smeri, ji pripišemo pozitivni eksponent, sicer pa negativnega. Poligonu, ki smo ga priredili povezani vsoti dveh torusov tedaj priredimo zapis

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} ,$$

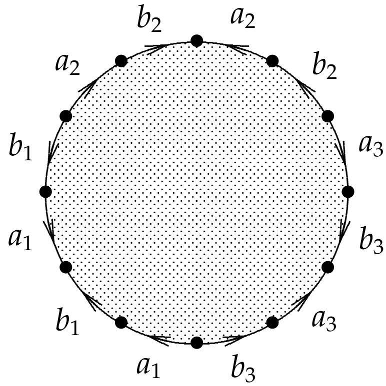
povezani vsoti dveh projektivnih ravnin pa

$$a_1 a_1 a_2 a_2 .$$

Povzemimo zgornje (v nekem smislu kanonične) razreze:

1. sfera je »poligon« z identifikacijo robov aa^{-1};
2. povezana vsota n torusov je poligon z identifikacijo robov

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} ;$$



Slika 4.9. Povezana vsota n torusov

3. povezana vsota n projektivnih ravnin je poligon z identifikacijo robov

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n \,.$$

Zdaj pa k dokazu izreka 4.2.1.

Dokaz. Naj bo N neka sklenjena ploskev. Izrek se dokaže tako, da se pokaže, da se da N izraziti kot poligon s tako identifikacijo robov, kot v enem od zgoraj navedenih »kanoničnih« primerov. S tem dokažemo, da je N homeomorfna bodisi sferi bodisi povezani vsoti torusov bodisi povezani vsoti projektivnih ravnin. Ker povezane vsote projektivnih ravnin ne morejo ležati v $\mathbb{R}^3$, dobimo prvo trditev izreka.

Prvi korak: poligon. Predpostavimo, da je naša sklenjena ploskev N triangulirana. Naj ima n trikotnikov. Te trikotnike $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ označimo tako, da ima poljuben trikotnik Δ_i, $2 \leq i \leq n$, vsaj en rob, ki ga označimo z e_i, skupen z vsaj enim od trikotnikov z nižjim indeksom. To lahko naredimo, ker je N povezana.

Privzamemo lahko, da so trikotniki Δ_i' v $\mathbb{R}^2$ disjunktni (sicer komponiramo dane homeomorfizme z novimi, da dobimo disjunktne trikotnike v ravnini) in označimo

$$\Delta' = \bigcup_1^n \Delta_i' \,.$$

To je kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^2$. Definiramo preslikavo $\varphi\colon \Delta' \to N$ tako, da je $\varphi|\Delta_i' = h_i$. Očitno je to zvezna in surjektivna preslikava. Ker je Δ' kompakten prostor, N pa Hausdorffov, je φ kvocientna preslikava. Pri tej preslikavi identificiramo robove trikotnikov iz ravnine. Mi pa bomo najprej identificirali le prej izbrane robove e_i, $2 \leq i \leq n$ in označili tako dobljeni kvocientni prostor z D. Preslikava φ inducira preslikavo $\psi\colon D \to N$. Imamo torej naslednji diagram.

$$\begin{tikzcd}
\Delta' \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & D \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Trdimo, da je D disk, tj. topološki prostor, ki je homeomorfen standardnemu disku. Dokaz te trditve gre z indukcijo, sledi pa iz dveh dejstev. Prvič, da dobimo D z enkratno identifikacijo izbranih robov ali pa z zaporedjem takih kvocientnih preslikav, pri katerih vsakič identificiram le po en izbrani rob. Drugič, da je rezultat pri vsaki taki identifikaciji disk.

Iz D potem dobimo našo ploskev N tako, da v parih identificiramo še robove poligona D.

Drugi korak: eliminacija sosednjih robov prve vrste. Dobili smo poligon D z identifikacijo parov robov, ki nam da našo ploskev.

Identifikacijo smo zapisali s končnim zaporedjem simbolov za robove z eksponenti +1 ali −1. Če se posamezni par robov, ki ga identificiramo pojavi z obema eksponentoma, mu rečemo *par prve vrste*, sicer pa mu rečemo *par druge vrste*.

V tem koraku pokažemo, da lahko odpravimo tak par robov prve vrste, ki se drži skupaj v natanko enem vrhu tj. oblike $\ldots aa^{-1}\ldots$, v katerem res imamo še druge robove vsaj na eni strani para aa^{-1}. (Slika 4.10 na sosednji strani.)

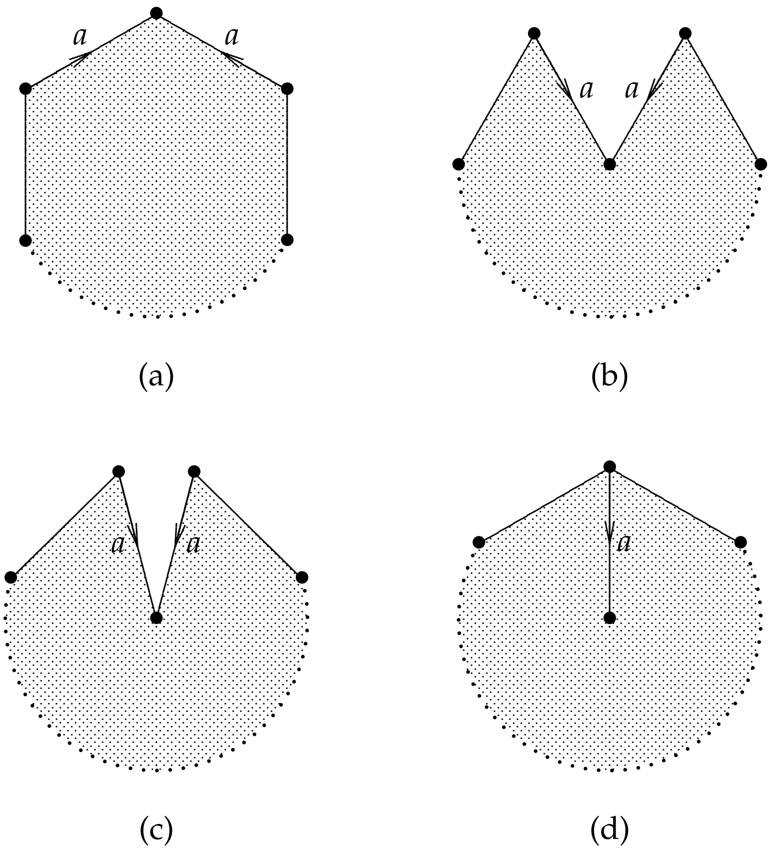
Ta proces lahko nadaljujemo, dokler ne eliminiramo vseh parov prve vrste (v tem primeru gremo na naslednji korak) ali pa nam ostane poligon, ki ima le še en par robov, ki pa se v tem primeru stika v dveh vrhovih. Če je ta par prve vrste (tj. aa^{-1}), gre za sfero, če pa je ta par druge vrste (tj. aa), gre za projektivno ravnino.

Tretji korak: poligon, v katerem identificiramo vsa oglišča. Čeprav dobimo iz našega polinoma željeno ploskev tako, da identificiramo po natanko dva robova, pa se nam lahko identificira poljubno število oglišč (vrhov). Vrhove, ki se pri identificirajo, imenujmo *ekvivalentne*.

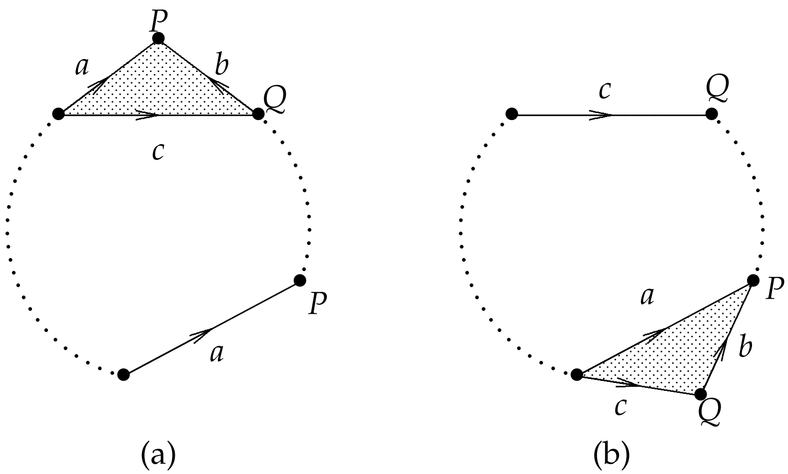
Recimo, da smo izvedli korak dva, dokler se je dalo in še nismo prišli do naše ploskve. Pokazali bomo, da lahko spremenimo naš poligon v takega, ki bo dal isto ploskev, a se bodo pri njem vsi vrhovi identificirali. To naredimo po postopku, ki ga kaže slika 4.11 na strani 122 skupaj z eventualnimi koraki 2.

Četrti korak: vse pare druge vrste naredimo za sosednje. Tak postopek nadaljujemo, dokler ne naredimo vse pare druge vrste za sosednje. Če ni nobenih parov prve vrste, smo gotovi, dobili smo poligon s simbolom $a_1a_1a_2a_2\ldots a_na_n$, ki predstavlja povezano vsoto projektivnih ravnin. (Slika 4.11 na strani 122.)

Recimo, da imamo na tem koraku vsaj en par prve vrste. Tedaj mora obstajati še en par prve vrste in to tako, da se para alternirata (tj. $\ldots c\ldots d\ldots c^{-1}\ldots d^{-1}\ldots$), sicer pridemo do protislovja s prejšnjim korakom, kot kaže slika 4.12 na strani 123.



Slika 4.10. Eliminacija para sosednih robov prve vrste



Slika 4.11. Tretji korak v dokazu izreka 4.2.1

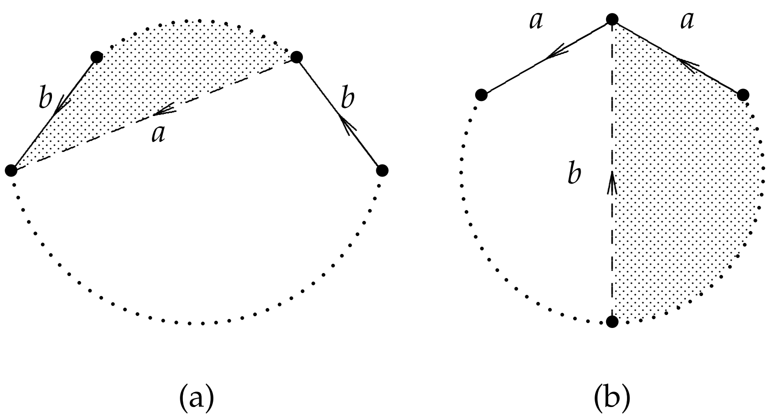
Peti korak: pari prve vrste. Z razrezovanjem in lepljenjem kot ga kaže slika 4.13 na strani 124 lahko spravimo skupaj vse alternirajoče pare parov prve vrste.

Če ni nobenih parov druge vrste, smo dobili poligon s simbolom

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}\,,$$

ki nam da povezano vsoto torusov.

Zdaj moramo obravnavati še poligone, pri katerih imamo v tem koraku tako pare prve kot tudi druge vrste. Tu pa uporabimo dejstvo, da je povezana vsota torusa in projektivne ravnine homeomorfna povezani vsoti treh projektivnih ravnin, kar bomo dokazali v naslednji trditvi. Recimo, da ima naš poligon m takih parov ($m > 0$) druge vrste, ki se stikajo v po enem vrhu in n takih četverk ($n > 0$)



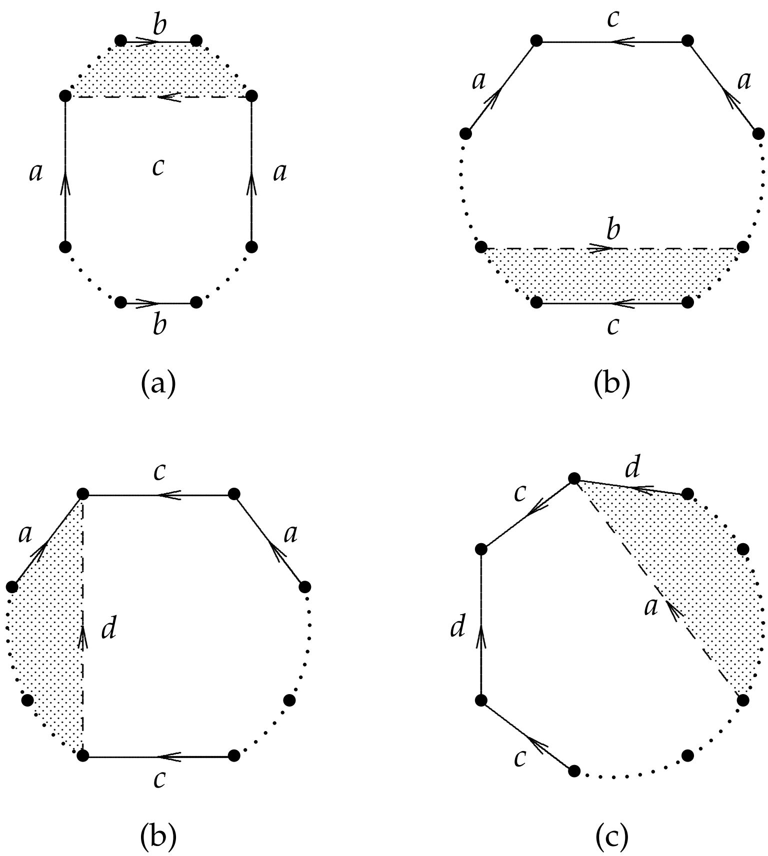
Slika 4.12. Četrti korak v dokazu izreka 4.2.1

robov, ki jih sestavljata po dva para prve vrste, ki se medsebojno separirata (alternirata). Ta poligon nam da povezano vsoto n projektivnih ravnin in m torusov in ta povezana vsota je (po trditvi 4.2.3) homeomorfna povezani vsoti $m + 2n$ projektivnih ravnin.

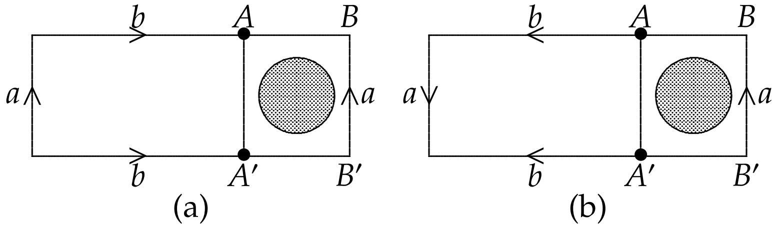
□

Trditev 4.2.3. *Povezana vsota projektivne ravnine in torusa je homeomorfna povezani vsoti treh projektivnih ravnin.*

Dokaz. V prvem razdelku tega poglavja smo pokazali, da je povezana vsota dveh projektivnih ravnin homeomorfna Kleinovi steklenici. Zato zadošča za dokaz te trditve, če pokažemo, da je povezana vsota projektivne ravnine in torusa homeomorfna povezani vsoti projektivne ravnine in Kleinove steklenice. V ta namen si pobliže oglejmo, kaj pomeni povezana vsota poljubne ploskve N s torusom ali Kleinovo steklenico.



Slika 4.13. Peti korak v dokazu izreka 4.2.1



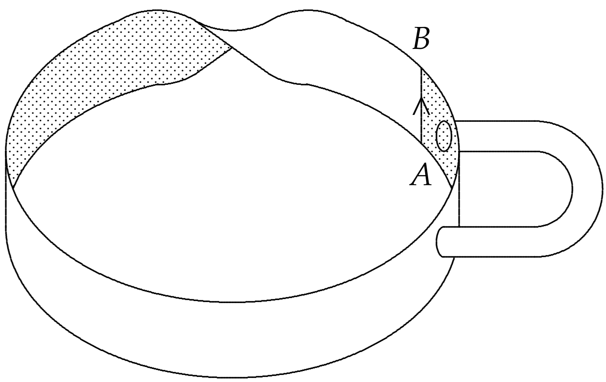
Slika 4.14. Torus z luknjo (levo) in Kleinova steklenica z luknjo (desno)

Torus in Kleinovo steklenico lahko predstavimo kot ustrezni kvocientni prostor pravokotnika, kot kaže slika 4.14.

Pri konstrukciji povezane vsote najprej izrežemo osenčeni disk (slika), izrežemo prav tak disk iz ploskve N in zlepimo (identificiramo) rob luknje v torusu oziroma Kleinovi steklenici z robom luknje v N. To lepljenje pa lahko izvedemo v dveh korakih: najprej nalepimo na ploskev N le tisti del torusa oziroma Kleinove steklenice, ki je ustrezni kvocientni prostor pravokotnika $ABA'B'$ (tj. pravokotnik $ABA'B'$ z zlepljenima stranicama AB in $A'B'$), v drugem koraku pa nalepimo še ostali del torusa oziroma Kleinove steklenice.

V prvem koraku pravzaprav izvedemo povezano vsoto s cevjo ali cilindrom in kar dobimo je homeomorfno ploskvi N z dvema luknjama (saj je cev homeomorfna 2-sferi z dvema luknjama in povezana vsota ploskve z 2-sfero je spet prvotna ploskev). V drugem koraku nalepimo na robova teh dveh lukenj ostanek torusa oziroma Kleinove steklenice. V obeh primerih to pomeni, da povežemo robova teh dveh lukenj s cevjo, razlika pa je v tem, da v primeru torusa povežemo robova lukenj tako, da se orientacija vzdolž dodane cevi obrne, v primeru Kleinove steklenice pa ohrani. (Glej sliki 4.15 in 4.16.)

Naj bo zdaj naša ploskev N Möbiusov trak, ploskev, ki jo dobimo z lepljenjem torusa na N imenujmo P_1, ploskev, ki jo dobimo



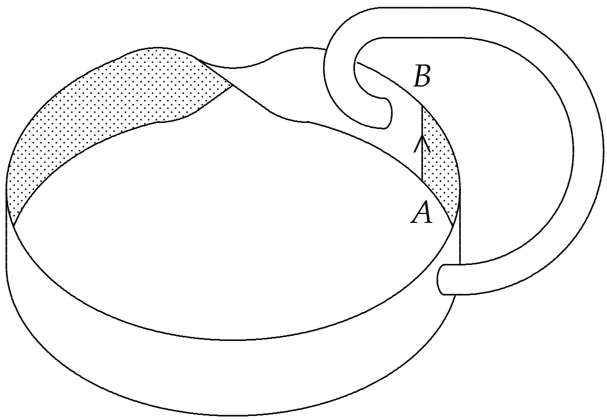
Slika 4.15. Povezana vsota Möbiusovega traku in torusa

z lepljenjem Kleinove steklenice na N, pa imenujmo P_2. Pokažimo, da sta P_1 in P_2 homeomorfni ploskvi.

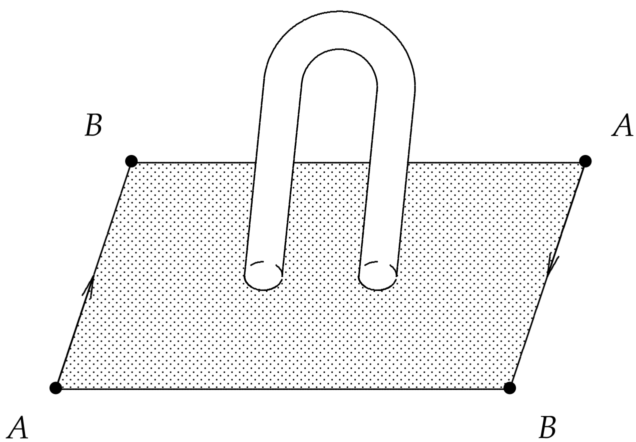
Razrežimo P_1 in P_2 vzdolž črte AB. V obeh primerih dobimo povezano vsoto cilindra in torusa, ali, drugače rečeno, kvocientni prostor povezane vsote pravokotnika in torusa, pri katerem zlepimo z nasprotno orientacijo en par nasproti ležečih stranic pravokotnika. To pa pomeni, da sta P_1 in P_2 homeomorfna. (Glej sliko 4.17 na naslednji strani!)

Kot smo že pokazali, dobimo projektivno ravnino z lepljenjem roba diska na Möbiusov trak. Ker sta topološka prostora dobljena z lepljenjem torusa oziroma Kleinove steklenice na Möbiusov trak homeomorfna, sta taka tudi prostora, ki ju dobimo, če nalepimo rob diska na rob vsakega od obeh omenjenih topoloških prostorov. Trditev je tako dokazana.

□



Slika 4.16. Povezana vsota Möbiusovega traku in Kleinove steklenice



Slika 4.17. Rezultat rezanja prostorov iz slik 4.15 in 4.16 vzdolž daljice AB

Poglavje 5

Prostori funkcij

Za motivacijo si zamislimo naslednji problem: v neki množici S funkcij med dvema danima prostoroma želimo poiskati tako funkcijo, ki ustreza nekemu pogoju minimalnosti; to je, imamo definirano neko kriterijsko funkcijo $e\colon S \to \mathbb{R}$ in iščemo tako funkcijo $f \in S$, za katero je $e(f) = \min_S\{e(g); g \in S\}$. V takem primeru si včasih lahko pomagamo tako, da uvedemo v množico funkcij S tako topologijo, da je S kompakten prostor, e pa zvezna funkcija. Tedaj nam izrek 2.4.1 zagotavlja, da iskana funkcija f z lastnostjo minimalnosti obstaja. Seveda to nikakor ni edini primer situacije, v kateri je koristno vpeljati v množice funkcij primerno topologijo.

Iste množice funkcij lahko opremimo z različnimi naravnimi topologijami. V tem poglavju si bomo ogledali le nekaj takih topologij in nekaj najbolj enostavnih lastnosti raznih prostorov funkcij.

5.1 Enakomerna metrika

Definicija. Naj bo (Y, d) metrični prostor in $\bar{d}(a, b) = \min\{d(a, b), 1\}$ standardna omejena metrika na Y prirejena metriki d. Naj bo X poljubna množica. Tedaj lahko na množici Y^X vseh funkcij iz X v Y

definiramo metriko

$$\bar{\rho}(f,g) = \sup_{x\in X}\{\bar{d}(f(x), g(x))\}\,.$$

Tej metriki rečemo *enakomerna metrika* inducirana z metriko d v prostoru Y.

Da je z zgornjim predpisom definirana preslikava $\bar{\rho}$ res metrika, preverite sami za vajo. Metrika $\bar{\rho}$ je dobila ime enakomerna metrika zato, ker zaporedje funkcij $f_n\colon X \to Y$ konvergira v metriki $\bar{\rho}$ k funkciji f natanko tedaj, ko to zaporedje konvergira k f enakomerno, tj. za vsako pozitivno število ε obstaja tako naravno število N, da za vsak $x \in X$ velja $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ za vsak $n > N$. Tudi to preverite sami za vajo.

Izrek 5.1.1. *Če je prostor (Y, d) poln metrični prostor, je tudi prostor Y^X poln metrični prostor z enakomerno metriko $\bar{\rho}$, inducirano z metriko d.*

Dokaz. Najprej opazimo, da so vsa zaporedja v Y Cauchyjeva v metriki d natanko tedaj, ko so Cauchyjeva v metriki $\bar{d}$. Zato je tudi $(Y, \bar{d})$ poln metrični prostor. Naj bo (f_n) Cauchyjevo zaporedje v $(Y^X, \bar{\rho})$. Ker za vsak dani $x \in X$ in za vsaki naravni števili m in n velja

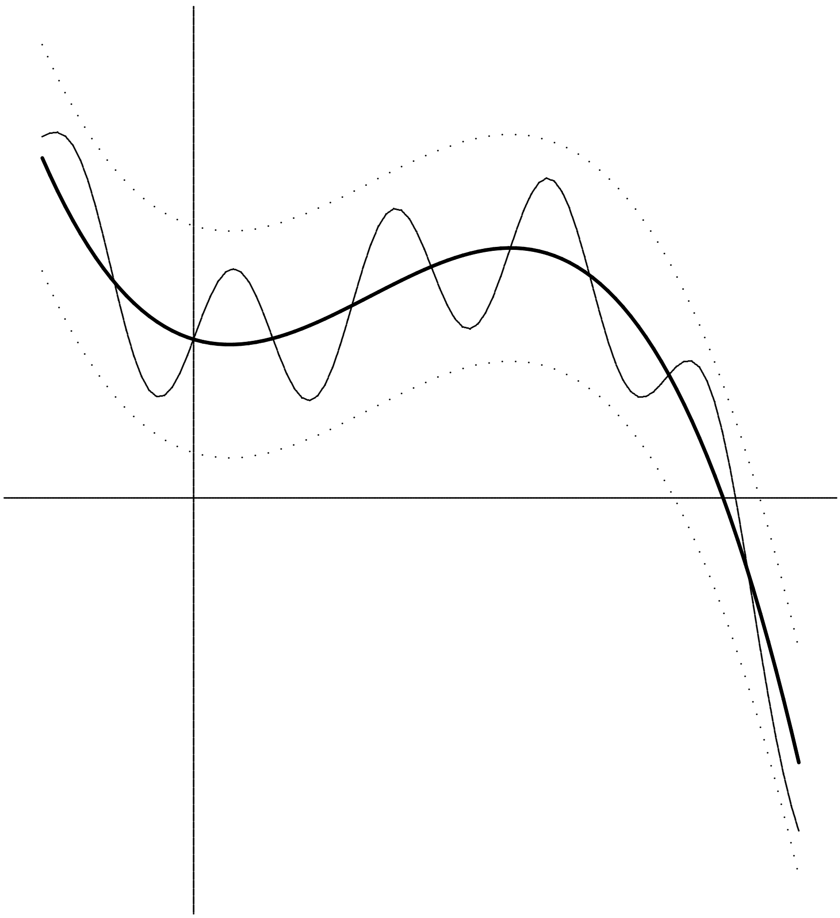
$$\bar{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)\,,$$

je zaporedje slik $f_1(x), f_2(x), \ldots$ Cauchyjevo zaporedje v $(Y, \bar{d})$. Zato je to zaporedje tudi konvergentno v Y, njegovo limito označimo z y_x. Ker smo tako vsakemu $x \in X$ priredili neki $y_x \in Y$, smo dobili neko funkcijo

$$f\colon X \longrightarrow Y\,, \qquad x \longmapsto y_x\,.$$

Pokažimo, da je ta funkcija limita zaporedja (f_n) v $(Y^X, \bar{\rho})$. Za dani $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za poljubni $n, m \in \mathbb{N}$ velja implikacija

$$n, m \geq N \Longrightarrow \bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2\,.$$



Slika 5.1. Funkcija g je iz ε–okolice funkcije f v enakomerni metriki ($\varepsilon < 1$)

Zato velja za vsak $x \in X$ za iste n in m tudi

$$\bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2\,.$$

Odtod pa sledi, če povečujemo m preko vseh meja,

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2\,.$$

Ta neenakost velja za vsak $x \in X$, če je le $n \geq N$, zato velja tedaj tudi

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon\,,$$

in je f res limita zaporedja (f_n) v metriki $\bar{\rho}$.

□

Kot smo videli, nam je za zgornji rezultat zadoščalo, da je X poljubna množica. Če pa je X tudi topološki prostor, nas zanima, kaj lahko rečemo o prostoru $C(X, Y)$ vseh zveznih funkcij iz X v Y.

Izrek 5.1.2. *Naj bo X topološki prostor, (Y, d) pa metrični prostor. Tedaj je množica $C(X, Y)$ vseh zveznih funkcij iz X v Y zaprta množica v prostoru $(Y^X, \bar{\rho})$. Če je (Y, d) tudi poln metrični prostor, je tedaj tudi $C(X, Y)$ z metriko $\bar{\rho}$ poln metrični prostor.*

Dokaz. Najprej opazimo, da druga trditev izreka sledi neposredno iz prve. Prostor Y^X je poln po prejšnjem izreku 5.1.1, če je $C(X, Y)$ zaprta množica v polnem metričnem prostoru, je seveda tudi sama poln metrični prostor (gl. razdelek 2.3).

Za prvo trditev izreka naj bo $f_1, f_2, \ldots$ zaporedje zveznih funkcij iz X v Y, ki konvergirajo k funkciji f v metriki $\bar{\rho}$. To pa pomeni, da enakomerno konvergirajo k f. Tedaj pa je tudi f zvezna funkcija, kot nam pove naslednji izrek.

□

Izrek 5.1.3. (Izrek o enakomerni limiti.) *Naj bo $f_n\colon X \to Y$ zaporedje zveznih funkcij iz topološkega prostora X v metrični prostor Y. Če funkcije f_n konvergirajo enakomerno k f, je tudi f zvezna funkcija.*

Dokaz. Naj bo V odprta množica v Y. Odprtost praslike $f^{-1}(V)$ bomo pokazali tako, da bomo vsaki točki $x_0 \in f^{-1}(V)$ poiskali tako okolico U, ki je vsebovana v $f^{-1}(V)$.

Najprej izberemo tak $\varepsilon > 0$, da velja

$$K(f(x_0), \varepsilon) \subset V\,,$$

kjer je $K(f(x_0), \varepsilon)$ krogla s središčem $f(x_0)$ in polmerom ε. Zaradi enakomerne konvergence lahko najdemo za naš ε tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ in vsak $x \in X$ velja

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/4\,.$$

Zaradi zveznosti funkcije f_N obstaja taka okolica U za x_0, da je

$$f_N(U) \subset K(f_N(x_0), \varepsilon/2)\,,$$

kjer je $K(f_N(x_0), \varepsilon/2)$ krogla s središčem v $f_N(x_0)$ in polmerom $\varepsilon/2$.

Za $x \in U$ velja

$$d(f(x_0), f(x)) \leq d(f(x_0), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x))$$

in ker po konstrukciji velja za prvi in tretji sumand, da sta manjša od $\varepsilon/4$, drugi pa je manjši od $\varepsilon/2$, smo pokazali, da je za vsak $x \in U$ razdalja $d(f(x_0), f(x))$ manjša od ε in je zato $f(U) \subset V$, kar smo želeli pokazati.

$\square$

Vaje.

1. Preverite, da je $\bar{\rho}$ res metrika na Y^X.
2. Preverite, da zaporedje funkcij $f_n\colon X \to Y$ konvergira v metriki $\bar{\rho}$ k funkciji $f\colon X \to Y$ natanko tedaj, ko to zaporedje funkcij konvergira enakomerno k f.
3. Poiščite tako zaporedje zveznih funkcij $f_n\colon X \to Y$, da za vsak $x \in X$ zaporedje točk $f_n(x)$ konvergira k neki vrednosti $F(x) \in Y$, na ta način definirana funkcija $F\colon X \to Y$ pa ni zvezna.

5.2 Ascolijev izrek

Naj bo X poljubni kompaktni prostor. V tem razdelku si bomo ogledali izrek, ki karakterizira kompaktne podmnožice v prostoru $C(X, \mathbb{R}^n)$ z enakomerno topologijo.

Ker je X kompakten prostor, ni težko pokazati, da je enakomerna topologija inducirana z metriko

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\},$$

kjer je d evklidska metrika v $\mathbb{R}^n$. Zaradi kompaktnosti X so namreč razdalje $d(f(x), g(x))$ omejene (zato za definicijo topologije ni treba uporabiti standardne omejene metrike $\bar{d}$) in po izreku 2.4.1 lahko supremum nadomestimo z maksimumom. Preverite to sami za vajo!

V evklidskem prostoru so vse zaprte in omejene množice tudi kompaktne. V prostoru $C(X, \mathbb{R}^n)$ pa to v splošnem ne drži. Za kompaktnost potrebujemo še eno lastnost – enakozveznost.

Definiciji. Naj bo X topološki prostor, (Y, d) metrični prostor, $\mathcal{F}$ pa neka množica v $C(X, Y)$. Množica $\mathcal{F}$ je *enakozvezna v točki* $x_0 \in X$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka okolica U točke x_0, da velja

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

za vsak $x \in U$ in vsako funkcijo $f \in \mathcal{F}$.

Množica $\mathcal{F}$ je *enakozvezna*, če je enakozvezna v vsaki točki $x \in X$.

Zveznost funkcije f v x_0 pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neka taka okolica U_f točke x_0, da je $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za vsak $x \in U_f$. V družini $\mathcal{F}$ so lahko vse funkcije v x_0 zvezne, a za vsako funkcijo $f \in \mathcal{F}$ obstaja drugačna okolica U_f in prav lahko se zgodi, da za dani pozitivni ε nobena okolica U točke f ni dobra za vse funkcije $f \in \mathcal{F}$. Enakozveznost v točki x_0 družine $\mathcal{F}$ pa pomeni, da za dani $\varepsilon > 0$ obstaja ena taka okolica U točke x_0, ki je dobra za vse $f \in \mathcal{F}$.

Trditev 5.2.1. *Naj bo X kompakten topološki prostor, (Y, d) kompakten metrični prostor, $\mathcal{F}$ pa neka podmnožica v prostoru $C(X, Y)$. Tedaj je $\mathcal{F}$ enakozvezna natanko tedaj, ko je totalno omejena v metriki ρ v $C(X, Y)$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da iz totalne omejenosti $\mathcal{F}$ sledi enakozveznost. Za dano točko $x_0 \in X$ bomo pokazali, da je $\mathcal{F}$ enakozvezna v x_0.

Imejmo $\varepsilon > 0$. Ker je $\mathcal{F}$ totalno omejena, obstaja končno mnogo krogel (glede na metriko ρ)

$$B(f_1, \varepsilon/4), \ldots, B(f_n, \varepsilon/4)$$

z radijem $\varepsilon/4$, ki pokrijejo $\mathcal{F}$. Ker je vsaka funkcija f_i zvezna v točki x_0 in je teh funkcij končno mnogo, obstaja taka okolica U za x_0, da za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja

$$d(f_i(x_0), f_i(x)) < \varepsilon/2\,, \text{ če je } x \in U.$$

Enakozveznost bo sledila, če pokažemo, da za vsak x iz U in vsako funkcijo $f \in \mathcal{F}$ velja $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Naj bo $f \in \mathcal{F}$. Tedaj je $f \in B(f_i, \varepsilon/4)$ za vsaj en $i \in \{1, \ldots, n\}$ in za ta i velja

$$d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon/4\,, \quad d(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon/2\,, \quad d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/4\,.$$

Iz trikotniške neenakosti tedaj sledi

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Pokažimo še, da iz enakozveznosti sledi totalna omejenost. Naj bo $\mathcal{F}$ enakozvezna in naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da lahko množico $\mathcal{F}$ pokrijemo s končno mnogo metričnimi kroglami z radijem ε. Zaradi enakozveznosti lahko za vsak $x \in X$ najdemo tako okolico U_x točke x, da velja

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon/4$$

za poljubno točko $y \in U_x$ in funkcijo $f \in \mathcal{F}$. Zaradi kompaktnosti obstaja že končno mnogo takih točk $x_1, \ldots, x_k$ v X in njihovih okolic $U_i = U_{x_i}$, da velja

$$d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/4$$

za poljubno točko $x \in U_i$ in funkcijo $f \in \mathcal{F}$ in je $X = \cup_{i=1}^k U_i$. Pokrijmo še prostor Y s končno mnogo metričnimi kroglami $V_1, \ldots, V_m$ s premerom manjšim od $\varepsilon/2$.

Naj bo J množica vseh funkcij $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$. Če za dano funkcijo $\alpha \in J$ obstaja kakšna taka funkcija $f \in \mathcal{F}$, ki preslika vsako točko x_i, $i = 1, \ldots, k$, v $V_{\alpha(i)}$, izberimo eno tako in jo označimo z f_α. Označimo z J' tisto podmnožico funkcij α v J, za katero obstaja f_α. Ker je v J končna množica funkcij, je tudi J' končna. V nadaljevanju bomo pokazali, da končna množica $\{B_\rho(f_\alpha, \varepsilon); \alpha \in J'\}$ metričnih krogel pokrije $\mathcal{F}$.

Naj bo $f \in \mathcal{F}$. Za vsak $i = 1, \ldots, k$ naj bo $\alpha(i)$ neko tako število, da je $f(x_i) \in V_{\alpha(i)}$. Na ta način smo dobili neko funkcijo $\alpha \in J'$. Trdimo, da je $f \in B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$.

Naj bo $x \in X$ in naj bo i tak, da je $x \in U_i$. Tedaj velja

$$d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon/4\,, \quad d(f(x_i), f_\alpha(x_i)) < \varepsilon/2\,, \quad d(f_\alpha(x_i), f_\alpha(x)) < \varepsilon/4\,.$$

Iz trikotniške neenakosti tedaj sledi

$$d(f(x), f_\alpha(x)) \le d(f(x), f_i(x)) + d(f(x_i), f_\alpha(x_i)) + d(f_\alpha(x_i), f_\alpha(x)) < \varepsilon\,.$$

Ker ta neenakost velja za vsak $x \in X$, dobimo

$$\rho(f, f_\alpha) = \max\{d(f(x), f_\alpha(x))\} < \varepsilon\,.$$

S tem smo za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{F}$ pokazali, da je $f \in B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$ za nek $\alpha \in J'$, torej je $\mathcal{F} \subset \cup_{\alpha \in J'} B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$. Ker je bil ε poljuben in J' končna množica, je $\mathcal{F}$ totalno omejena množica v $(C(X, Y), \rho)$.

□

Izrek 5.2.2. *Naj bo X kompakten topološki prostor in $C(X, \mathbb{R}^n)$ z metriko ρ opremljen metrični prostor vseh zveznih preslikav iz X v evklidski prostor $\mathbb{R}^n$. Tedaj je množica $\mathcal{F}$ v $C(X, \mathbb{R}^n)$ kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta, omejena in enakozvezna.*

Dokaz. Preden dokažemo obe implikaciji, pokažimo, da je za omejeno množico $\mathcal{F}$ v $C(X, \mathbb{R}^n)$, množica $\{f(x); f \in \mathcal{F}, x \in X\}$ vsebovana v neki kompaktni množici $Y \subset \mathbb{R}^n$ in zato $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.

Naj bo $f_0 \in \mathcal{F}$. Ker je $\mathcal{F}$ omejena, obstaja tako realno število $M > 0$, da velja $\rho(f_0, f) < M$ za poljuben $f \in \mathcal{F}$. Ker je X kompakten prostor, f_0 pa zvezna preslikava, je tudi $f_0(X)$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$, zato je omejena in tako vsebovana v neki krogli $B(0, N)$ v $\mathbb{R}^n$. V tem primeru pa je množica $f(X)$ vsebovana v krogli $B(0, M + N)$ za poljuben $f \in \mathcal{F}$. Naj bo Y zaprta krogla $\bar{B}(0, M + N)$, po konstrukciji velja $f(x) \in Y$ za vsak $x \in X$ in $f \in \mathcal{F}$.

Naj bo zdaj $\mathcal{F}$ kompaktna množica in dokažimo, da je zaprta, omejena in enakozvezna. Iz izreka 2.3.3 sledita zaprtost in omejenost v metriki ρ. Po prvem delu tega dokaza je $\mathcal{F}$ vsebovana v kompaktni podmnožici $C(X, Y)$, kjer je Y kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$, torej je $\mathcal{F}$ kompaktna. Iz izreka 2.3.2 sledi, da je $\mathcal{F}$ tudi totalno omejena množica, to pa po trditvi 5.2.1 zadošča za to, da je $\mathcal{F}$ enakozvezna.

Dokažimo še drugo implikacijo: naj bo $\mathcal{F}$ zaprta, omejena in enakozvezna množica v $C(X, \mathbb{R}^n)$ in pokažimo, da je $\mathcal{F}$ tudi kompaktna. Ker je $\mathcal{F}$ zaprta podmnožica polnega metričnega prostora $C(X, \mathbb{R}^n)$, je tudi sama poln metrični prostor. Ker je $\mathcal{F}$ omejena, je po prvem delu tega dokaza vsebovana v nekem podprostoru $C(X, Y)$ prostora $C(X, \mathbb{R}^n)$, kjer je Y kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$. Ker je $\mathcal{F}$ enakozvezna in sta prostora X in Y kompaktna, nam trditev 5.2.1 zagotavlja, da je $\mathcal{F}$ totalno omejena. Iz izreka 2.3.2 pa sledi, da je tudi kompaktna.

□

Opomba. Ascolijev izrek se da posplošiti na množice funkcij v poljubni metrični prostor, gl. npr. [7].

Vaje.

1. Naj d_∞ označuje supremum metriko na $\mathbb{R}^n$, tj.

$$d_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sup |x_i - y_i|.$$

   Označimo z ρ_∞ metriko v $C(X, \mathbb{R}^n)$, ki jo dobimo iz metrike d_∞ podobno kot smo definirali na začetku razdelka metriko ρ v $C(X, \mathbb{R}^n)$ s pomočjo metrike d v $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da sta metriki ρ in ρ_∞ ekvivalentni.

2. Pokažite, da je za kompakten prostor X metrika ρ v $C(X, \mathbb{R}^n)$ res ekvivalentna enakomerni metriki $\bar{\rho}$.

3. Poiščite tako družino $\mathcal{F}$ zveznih funkcij med dvema prostoroma, ki v neki točki ni enakozvezna. (Namig: poglejte potence $x \mapsto x^n$ na $[0, 1]$.)

5.3 Topologija konvergence po točkah

Poleg enakomerne topologije obstajajo še drugačne, a tudi naravne topologije v množici funkcij $C(X, Y)$. Tu si poglejmo topologijo v prostoru vseh funkcij Y^X (in tako tudi v podprostoru zveznih funkcij $C(X, Y)$), v kateri zaporedje funkcij konvergira natanko tedaj, ko konvergira »po točkah« kot rečemo v analizi.

Definicija. Naj bosta X in Y topološka prostora. Za dano točko $x \in X$ in odprto množico $U \subset Y$ definirajmo množico funkcij

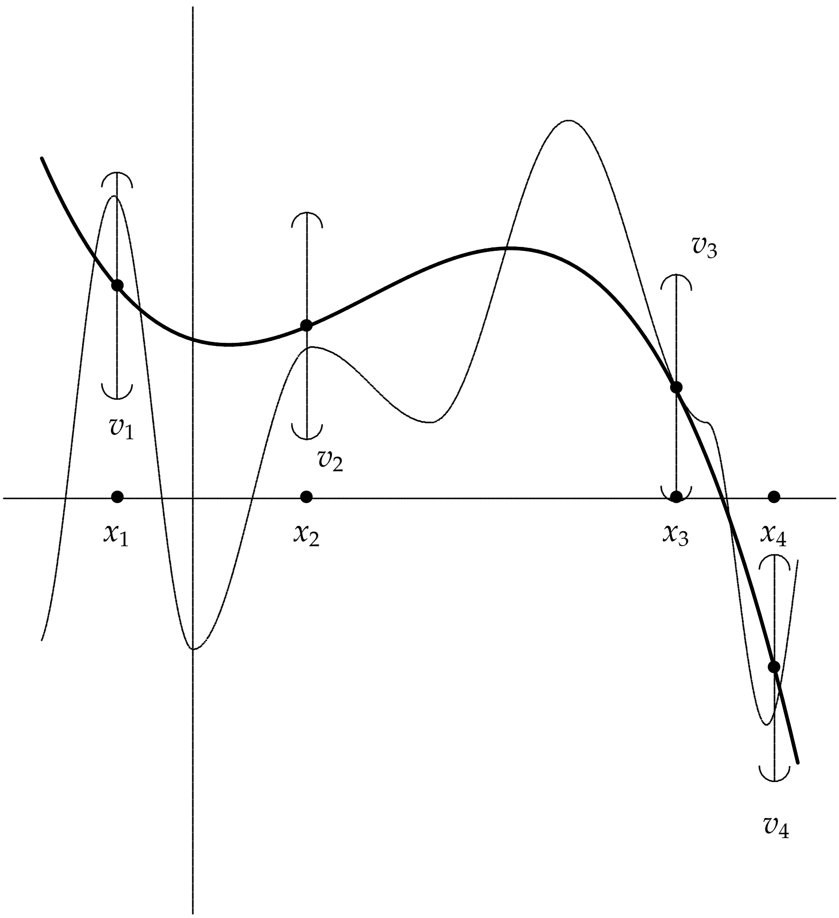
$$S(x, U) = \{f \in Y^X; f(x) \in U\}.$$

Tedaj vsi končni preseki $S(x_1, U_1) \cap \ldots \cap S(x_n, U_n)$ takih množic sestavljajo bazo neke topologije v Y^X, ki ji rečemo *topologija konvergence po točkah*.

Bazična okolica neke funkcije f v Y^X je tedaj množica vseh funkcij iz nekega preseka $S(x_1, U_1) \cap \ldots \cap S(x_n, U_n)$. Približno rečeno, je okolica funkcije f v tej topologiji množica vseh funkcij, ki se v danih končno mnogih točkah $x_1, \ldots, x_n$ ne razlikujejo veliko od f (v vseh ostalih točkah pa imajo popolnoma poljubne vrednosti).

Izrek 5.3.1. *V prostoru Y^X zaporedje (f_n) konvergira v topologiji konvergence po točkah k funkciji f natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ konvergira zaporedje točk $(f_n(x)) \in Y$ k točki $f(x)$.*

Dokaz. Naj zaporedje (f_n) konvergira k f v topologiji konvergence po točkah. Tedaj za vsako okolico $S(x, U)$, določeno samo s točko



Slika 5.2. Okolica funkcije v metriki konvergence po točkah

$x \in X$ in odprto okolico $U \subset Y$ točke $f(x)$, funkcije f obstaja tako naravno število N, da za vsak $\geq N$ velja $f_n \in S(x, U)$. To pa pomeni, da za vsak $n \geq N$ velja $f_n(x) \in U$. Zaporedje $f_n(x)$ torej res konvergira k $f(x)$ za vsak $x \in X$.

Dokažimo še drugo implikacijo: naj zaporedje $(f_n(x))$ konvergira k $f(x)$ za vsak $x \in X$ in pokažimo, da tedaj konvergira zaporedje funkcij (f_n) v topologiji konvergence po točkah k funkciji f. Pokazati moramo torej, da so v vsaki okolici oblike $S(x_1, U_1) \cap \ldots \cap S(x_k, U_k)$, kjer so U_i okolice točke $f(x_i)$, vse funkcije f_n od nekega n naprej. Za to zadošča, da so v vsaki okolici $S(x_i, U_i)$ vse funkcije f_n od nekega n naprej. To pa očitno drži, saj po predpostavki zaporedje $f_n(x_i)$ konvergira k $f(x_i)$, U_i pa je okolica točke $f(x_i)$.

$\square$

Topologija konvergence po točkah ima to slabo lastnost, da v njej množica zveznih funkcij ni nujno zaprta. Naj bo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, tedaj zaporedje zveznih funkcij $f_n(x) = x^n \in I^I$ konvergira v topologiji konvergence po točkah k funkciji $f(x)$, ki pa ni zvezna v točki $x = 1$.

Vaja. Dokažite, da končni preseki množic oblike $S(x, U)$ res definirajo bazo neke topologije v Y^X.

Poglavje 6

Linearni topološki prostori

Linearni topološki prostor je vektorski prostor, v katerem je dana taka topologija, da je seštevanje dveh vektorjev zvezna preslikava in tudi produkt vektorja s skalarjem je zvezna preslikava. Zaradi dveh struktur v takem prostoru uporabljamo tudi različne izraze za iste stvari. Elementom takega prostora na primer rečemo včasih vektorji, včasih pa točke.

V tem poglavju omenimo definicijo linearnih topoloških prostorov, ogledamo si nekaj pomembnih primerov. Osredotočimo se na načine s katerimi je v takih prostorih določena topologija. Več o linearnih topoloških prostorih si lahko preberete v [9].

Za začetek ponovimo definicijo vektorskega prostora.

Definicije. Množica V skupaj z operacijama seštevanje $V \times V \to V$ in množenje s skalarjem $\mathbb{F} \times V \to V$ je *vektorski prostor* nad poljem $\mathbb{F}$, če je

1. $(V, +)$ Abelova grupa, tj. seštevanje v V je asociativno in komutativno, zanj obstaja nevtralni element v V in vsakemu elementu iz V obstaja nasprotni element za seštevanje;

2. za množenje s skalarjem velja

(a) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ za poljubne elemente $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V$,

(b) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ za poljubne elemente $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V$,

(c) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ za poljubne elemente $\lambda \in \mathbb{F}, u, v \in V$,

(d) $1.u = u$ za vsak $u \in V$.

Elementom v V rečemo *vektorji*, elementom v $\mathbb{F}$ pa skalarji.

Podmnožici $W \subset V$ rečemo *linearni* (ali vektorski) *podprostor* vektorskega prostora V, če je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem.

Naj bo A poljubna podmnožica vektorskega prostora V. Najmanjšemu linearnemu podprostoru v V, ki vsebuje A, rečemo *linearna lupina* množice A in označimo z $\mathcal{L}(A)$.

Preslikavi $f\colon V \to U$ iz vektorskega prostora V nad $\mathbb{F}$ v vektorski prostor U nad $\mathbb{F}$ rečemo *linearna preslikava* ali *linearna transformacija*, če za poljubna vektorja $v_1, v_2 \in V$ in poljubna skalarja α, β velja

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)\,.$$

6.1 Definicija

Definicija. Vektorski prostor V nad obsegom $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ imenujemo *linearni topološki prostor* ali *topološki vektorski prostor*, če je V tudi tak topološki prostor, da sta preslikavi

1. seštevanje
$$V \times V \longrightarrow V\,, \quad (u, v) \mapsto u + v$$

2. množenje s skalarjem
$$\mathbb{F} \times V \longrightarrow V\,, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

zvezni, kjer sta produkta $V \times V$ in $\mathbb{F} \times V$ opremljena s produktno topologijo in $\mathbb{F}$ s topologijo, ki jo poraja običajna evklidska metrika ($d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$).

Preden si ogledamo nekaj primerov linearnih topoloških prostorov, dokažimo še kakšno zanimivo trditev, s katero si olajšamo pregled nad takimi prostori.

Trditev 6.1.1. *Naj bo V linearni topološki prostor in $a \in V$ poljubni vektor v njem. Tedaj je premik ali translacija za vektor a, to je preslikava*

$$P_a \colon V \longrightarrow V\,, \quad v \mapsto a + v\,,$$

homeomorfizem.

Tudi razteg za poljubni skalar $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, to je preslikava

$$R_\lambda \colon V \longrightarrow V\,, \quad v \mapsto \lambda v\,,$$

je homeomorfizem.

Dokaz. Preslikavi P_a in P_{-a} sta si inverzni preslikavi in zato obe bijekciji. Preslikava P_a je zožitev seštevanja, to je zožitev preslikave 1 in je zato zvezna. Podobno velja za $P_{-a} = P_a^{-1}$, zato je P_a homeomorfizem.

Tudi preslikava R_λ je zožitev množenja s skalarjem, to je preslikave 2, zato je zvezna preslikava. Njej inverzna preslikava je $R_{1/\lambda}$, ki je tudi zvezna. Tako je tudi R_λ homeomorfizem.

□

Posledica 6.1.2. *V linearnem topološkem prostoru je topologija natanko določena z družino odprtih množic, ki vsebujejo točko 0, to je, z družino odprtih okolic točke 0. V takem prostoru so vse okolice poljubne točke x oblike $x + U$, kjer je U okolica točke 0.*

Dokaz. Naj bo U poljubna neprazna odprta podmnožica linearnega topološkega prostora V in $u \in U$ poljubna točka v U. Ker je premik za vektor $-u$ homeomorfizem, je U odprta množica natanko tedaj, ko je $-u + U$ odprta množica. Po konstrukciji pa $-u + U$ vsebuje točko 0 in je tako njena odprta okolica.

Vsaka okolica W točke v vsebuje neko odprto okolico U točke v in $-v + W \supset -v + U$, ki je odprta okolica točke 0. Obratno, če je W okolica točke 0, je $v + W$ okolica točke v, saj homeomorfizem preslika okolice na okolice.

□

Vaji.

1. Dokažite, da netrivialni vektorski prostor (tj. tak, ki ni enak trivialnemu vektorskemu prostoru $\{0\}$ z eno samo točko) z diskretno topologijo ni linearni topološki prostor. (Namig: Naj bo x vektor v tem prostoru, ali zaporedje x/n, za $n \in \mathbb{N}$, konvergira v diskretni topologiji?)

2. Dokažite, da je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, linearni topološki prostor nad obsegom $\mathbb{R}$.

6.2 Sistemi okolic

V tem razdelku bomo podali karakterizacijo sistemov okolic. Že v poglavju o topoloških prostorih smo obljubili, da bomo o vpeljavi topologije s pomočjo sistemov okolic spregovorili tu. Zaradi posledice 6.1.2 je to posebej elegantno v linearnih topoloških prostorih, saj je v njih topologija natanko določena s tem, da vemo kaj so okolice točke 0.

Izrek 6.2.1. *Naj bo X neprazna množica. Za vsako točko $x \in X$ imejmo dano tako družino $\mathcal{U}_x$ podmnožic množice X, da za vsako od njih veljajo naslednje lastnosti:*

1. *če je $U \in \mathcal{U}_x$, je $x \in U$;*

2. *če je $U \in \mathcal{U}_x$ in je $U \subset V$, je tudi $V \in \mathcal{U}_x$;*

3. *iz $U_i \in \mathcal{U}_x$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, sledi $\cap_i^n U_i \in \mathcal{U}_x$;*

4. *za vsako množico $U \in \mathcal{U}_x$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}_x$, da iz $y \in V$ sledi $U \in \mathcal{U}_y$.*

Tedaj vse te družine $\mathcal{U}_x$, za $x \in X$, določajo natanko eno topologijo v X, za katero je $\mathcal{U}_x$ sistem okolic točke x (tj. množica vseh okolic točke x).

Če je (X, τ) topološki prostor, za sisteme okolic $\mathcal{U}_x$ točk $x \in X$ veljajo vse zgoraj naštete lastnosti.

Imejmo v množici X dve družini sistemov okolic $\{\mathcal{U}_x; x \in X\}$ in $\{\mathcal{V}_x; x \in X\}$ in naj za vsak $x \in X$ velja $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$. Tedaj je topologija $\mathcal{S}$, ki jo inducira $\mathcal{V}_x; x \in X\}$ finejša od topologije $\mathcal{T}$, ki jo inducira $\{\mathcal{U}_x; x \in X\}$.

Dokaz. Najprej dokažimo, da vse družine $\mathcal{U}_x$, $x \in X$, določajo neko topologijo. Naj bo ρ družina tistih podmnožic $M \subset X$, za katere velja implikacija

$$x \in M \Longrightarrow M \in \mathcal{U}_x \tag{6.1}$$

in prazne množice $\emptyset$. Preverimo, da je ρ topologija na X. Zaradi lastnosti 2 je poljubna unija elementov iz ρ očitno tudi v ρ. Iz lastnosti 3 sledi, da je presek končno mnogih elementov iz ρ tudi v ρ. Očitno sta tudi X in $\emptyset$ v ρ. Družina ρ torej je neka topologija na X.

Ali je družina $\mathcal{U}_x$ sistem okolic točke x za topologijo ρ? Najprej dokažimo, da je vsaka množica $U \in \mathcal{U}_x$ okolica za x v topologiji ρ, to je, da vsebuje neko tako množico $V \in \rho$, da je $x \in V$. Za $U \in \mathcal{U}_x$ naj bo

$$U' = \{y \in U; U \in \mathcal{U}_y\}\,.$$

Ker je $x \in U' \subset U$, moramo pokazati le še, da je $U' \in \rho$. Za $y \in U'$ moramo torej pokazati, da je $U' \in \mathcal{U}_y$. Ker je $U \in \mathcal{U}_y$, po lastnosti 4 obstaja taka podmnožica $V \in \mathcal{U}_y$ v U (iz točke 1 namreč sledi, da je množica V v točki 4 podmnožica v U), da za vsak $z \in V$ velja $U \in \mathcal{U}_z$. To pa pomeni, da je $V \subset U'$ in tako po točki 2 tudi $U' \in \mathcal{U}_y$. Tako smo pokazali, da so množice iz $\mathcal{U}_x$ res okolice točke x glede na topologijo ρ.

Pokažimo še obratno, naj bo W okolica točke x glede na topologijo ρ in pokažimo, da je $W \in \mathcal{U}_x$. Ker je W okolica točke x, obstaja neka množica $U \in \rho$, da velja $x \in U \subset W$. Po konstrukciji ρ, je $U \in \mathcal{U}_x$ in zato po točki 2 tudi $W \in \mathcal{U}_x$.

Pokazali smo, da obstaja topologija, ki ima $\{\mathcal{U}_x; x \in X\}$ za družino sistemov okolic. Ali je to edina taka topologija? Da, saj so po trditvi 1.1.2 odprte množice s sistemi okolic natanko določene.

Pokažimo še to, da v topološkem prostoru za sistem okolic poljubne točke x veljajo lastnosti 1–4. Prvi dve lastnosti sledita neposredno iz definicije okolic. Tretjo lastnost, da je presek končno mnogo okolic U_i točke x tudi okolica točke x dobimo takole: za vsako okolico U_i obstaja odprta množica V_i, da je $x \in V_i \subset U_i$; ker je $\cap_i V_i$ odprta množica in je $\cap_i V_i \subset \cap_i U_i$ je tudi $\cap_i U_i$ okolica točke x. Lastnost 4 tudi sledi iz definicije okolice, za V lahko vzamemo tako odprto okolico točke x, da velja $x \in V \subset U$.

Pokažimo še zadnjo trditev izreka. Ker za vsak $x \in X$ velja $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$, za poljubno podmnožico $M \subset X$ velja

$$M \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow M \in \mathcal{V}_x$$

in po konstrukciji topologije iz sistemov okolic (6.1) sledi $M \in \rho \Rightarrow M \in \sigma$ in je topologija σ res finejša od topologije ρ.

□

Včasih okolice dane točke lažje opišemo s posebnimi okolicami.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{U}_x$ sistem okolic točke $x \in X$. Družini $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ rečemo *baza okolic* točke x, če velja: za vsak $U \in \mathcal{U}_x$ obstaja tak $V \in \mathcal{B}_x$, da je $V \subset U$.

En tak primer so okolice v metričnih prostorih, kjer bazo okolic točke x sestavljajo metrične krogle s središčem v x.

Trditev 6.2.2. *Naj bosta v množici X dani topologiji τ in σ. Če je $\{\mathcal{B}_x; x \in X\}$ družina baz okolic za topologijo τ, $\{\mathcal{C}_x; x \in X\}$ pa družina baz okolic za topologijo σ in velja $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{C}_x$ za vsak $x \in X$, je topologija σ finejša od topologije τ.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz izreka 6.2.1 in definicije baze okolic.

□

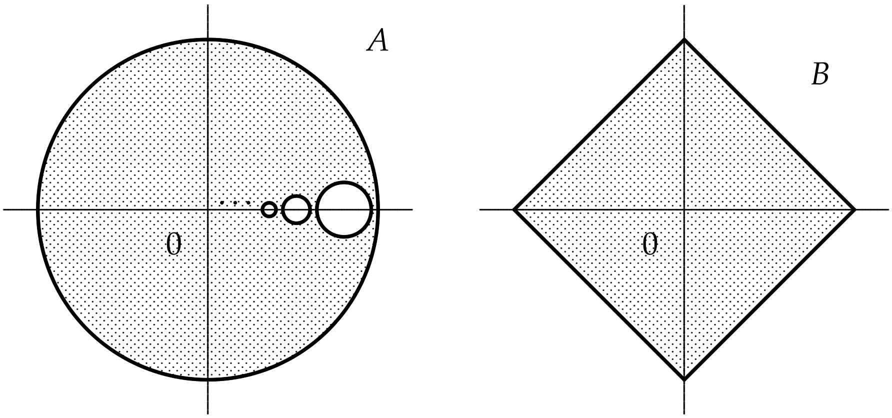
Posledica 6.2.3. *V vektorskem prostoru X naj bosta dani dve taki topologiji τ in σ, da sta (X, τ) in (X, σ) linearna topološka prostora. Naj bo $\mathcal{B}$ baza okolic niča v X glede na topologijo τ, $\mathcal{C}$ pa baza okolic niča v X glede na topologijo σ. Če velja $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, je topologija σ finejša od topologije τ.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz zgornje trditve in posledice 6.1.2.

□

6.3 Okolice niča

V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je v linearnem topološkem prostoru topologija podana s sistemom okolic niča (tj. točke 0). V tem



Slika 6.1. Množici A in B

razdelku pa bomo karakterizirali sisteme okolic niča v linearnem topološkem prostoru.

Definicije. Naj bo X linearni topološki prostor. Množica $A \subset X$ je *absorbirujoča*, če za vsak vektor $x \in X$ obstaja tako realno število $\lambda_x > 0$, da velja

$$\lambda > \lambda_x \Longrightarrow x \in \lambda A\,.$$

Množica $A \subset X$ je *uravnovešena*, če je za vsak $x \in A$ in tak $\lambda \in \mathbb{F}$, da je $|\lambda| \leq 1$, tudi $\lambda x \in A$.

Primer. Množica A na sliki 6.3 ni absorbirujoča. Množica B na sliki 6.3 je uravnovešena, če jo gledamo v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, ni pa uravnovešena, če jo gledamo v $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$.

$\diamond$

Trditev 6.3.1. *Naj bo X linearni topološki prostor. Tedaj velja:*

1. *vsaka okolica niča je absorbirujoča;*
2. *za vsako okolico U niča obstaja taka okolica V niča z lastnostjo $V + V \subset U$;*
3. *v vsaki okolici niča obstaja uravnovešena okolica niča.*

Dokaz. 1) Naj bo U okolica niča in $x \in X$. Po definiciji LTP je množenje s skalarjem zvezno kot funkcija dveh spremenljivk. Torej je tudi preslikava ene spremenljivke $\mathbb{F} \to X$, $\lambda \mapsto \lambda x$ zvezna v točki $\lambda = 0$. To pomeni, da za vsako okolico U niča v X obstaja tak $\varepsilon > 0$, da iz $|\lambda| < \varepsilon$ sledi $\lambda x \in U$. Za vsak $1/\lambda$, za katerega je $1/\lambda \geq 1/\varepsilon$, velja $x \in 1/\lambda U$. Torej je U absorbirujoča.

2) Ker je seštevanje v LTP zvezno, dobimo (zaradi zveznosti v točki $(0, 0)$) za dano okolico U niča taki okolici V_1 in V_2, da je $V_1 + V_2 \subset U$. Za $V = V_1 \cap V_2$ je torej $V + V \subset V_1 + V_2 \subset U$.

3) Upoštevamo, da je množenje s skalarjem zvezno tudi v točki $(0, 0)$. Za okolico U niča obstajata tak pozitivni skalar α in okolica V niča, da velja $\lambda V \subset U$ za vse $|\lambda| \leq \alpha$. Definirajmo

$$W = \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda V .$$

Ker so vse omenjene množice $\lambda V \subset U$, je tudi $W \subset U$. Pokažimo, da je množica W uravnovešena. Naj bo $x \in W$ in $|\mu| \leq 1$, pokazati moramo, da je tudi $\mu x \in W$. Po konstrukciji W je $x \in \lambda V$ za neki λ z $|\lambda| \leq \alpha$. Tedaj velja tudi $|\mu\lambda| \leq \alpha$ in zato $(\mu\lambda)V \subset W$ in $\mu x \in \mu\lambda V \subset W$, torej $\mu x \in W$ za vse μ z $|\mu| \leq 1$. W je res uravnovešena.

□

Izrek 6.3.2. *Naj bo X linearni topološki prostor. Obstaja taka baza $\mathcal{B}$ okolic niča v X, da so vse množice v $\mathcal{B}$ absorbirujoče in uravnovešene in za vsak $U \in \mathcal{B}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{B}$, da velja $V + V \subset U$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}$ družina vseh uravnovešenih okolic niča v X. Po zgornji trditvi 6.3.1 so vse te množice tudi absorbirujoče. Po isti trditvi najdemo za poljubni $U \in \mathcal{B}$ tudi tako okolico V niča, za katero velja $V + V \subset U$. Če V še ni uravnovešena, dobimo v njej po 6.3.1 tako uravnovešeno okolico W niča, da velja $W+W \subset V+V \subset U$. □

Obratno pa velja naslednji izrek.

Izrek 6.3.3. *Naj bo v vektorskem prostoru X dana družina $\mathcal{B}$ podmnožic z lastnostmi*

1. *vsaka množica v $\mathcal{B}$ je absorbirujoča;*
2. *vsaka množica v $\mathcal{B}$ je uravnovešena;*
3. *za vsako množico $U \in \mathcal{B}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{B}$, da velja $V + V \subset U$;*
4. *za poljubna $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ obstaja taka $W \in \mathcal{B}$, da je $W \subset U_1 \cap U_2$.*

Tedaj obstaja natanko ena taka topologija v X, da je X linearni topološki prostor in $\mathcal{B}$ je baza okolic niča za to topologijo.

Dokaz. Pokažimo najprej, da je $\mathcal{B}$ baza okolic niča in $x + \mathcal{B}$ baza okolic točke x za neko topologijo. Definirajmo družino $\mathcal{U}$ tako, da je $U \in \mathcal{U}$ natanko tedaj, ko obstaja tak $V \in \mathcal{B}$, da je $V \subset U$. S pomočjo izreka 6.2.1 bomo pokazali, da je $\mathcal{U}$ res sistem okolic točke 0 in da je za poljubno točko $x \in X$ družina $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}$ sistem okolic točke x.

Ker so množice v $\mathcal{B}$ uravnovešene, vsebujejo točko 0 in tako tudi vse množice iz $\mathcal{U}$ vsebujejo 0. Podobno tudi vse množice iz družine $x + \mathcal{U}$ vsebujejo točko x. Pokazali smo torej lastnost 1 izreka 6.2.1.

Po definiciji družine $\mathcal{U}$ velja tudi lastnost 2 izreka 6.2.1, namreč ta, da je vsaka množica, ki vsebuje neko okolico točke x tudi sama okolica točke x.

Zaradi lastnosti 4 je v preseku končno mnogo množic iz $\mathcal{B}$ spet neka množica iz $\mathcal{B}$. Zato je presek končno mnogo množic iz $\mathcal{U}$ spet v $\mathcal{U}$ in podobno presek končno mnogo množic iz $x + \mathcal{U}$ spet v $x + \mathcal{U}$. Pokazali smo lastnost 3 izreka 6.2.1.

Pokazati moramo še lastnost 4 izreka 6.2.1. Ta pravi, da za vsako množico $U \in \mathcal{U}_x$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}_x$, da iz $y \in V$ sledi $U \in \mathcal{U}_y$. Za dano množico $U \in \mathcal{B}$ vzemimo tako množico $V \in \mathcal{B}$, da velja $V + V \subset U$. Tedaj za poljubno točko $y \in V$ velja $y + V \subset U$ in je tako $U \in y + \mathcal{U}$.

Po izreku 6.2.1 obstaja v X natanko ena taka topologija, da je družina $x + \mathcal{U}$ sistem okolic točke x in tako $x + \mathcal{B}$ baza okolic točke x. Pokazati moramo še, da ta topologija naredi vektorski prostor X za linearni topološki prostor. To pomeni, da moramo pokazati zveznost seštevanja in produkta s skalarjem.

Lastnost (3) pove, da je seštevanje vektorjev zvezno v točki $(0, 0)$. Odtod pa takoj dokažemo tudi zveznost seštevanja v poljubni točki (x, y): v poljubni okolici $x+y+W$ točke $x+y$ je vsebovana neka bazična okolica $x + y + U$, $U \in \mathcal{B}$ in po lastnosti (3) dobimo okolico $V \in \mathcal{B}$, da za seštevanje velja

$$(x + V, y + V) \mapsto x + y + V + V \subset x + y + U \subset x + y + W .$$

Nekaj več dela pa bo z dokazom, da je tudi množenje s skalarjem zvezno. Naj bo $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in X$ in naj bo U okolica točke λx. Za zveznost bomo morali najti tako ε-okolico za $\lambda \in \mathbb{F}$ in tako okolico $x + T$ za $x \in X$, da se bo njun kartezični produkt preslikal pri množenju s skalarjem v U.

Po definiciji $\mathcal{U}_{\lambda x}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{B}$, da velja $\lambda x + V \subset U$. Po lastnosti (3) obstajata množici W' in W v $\mathcal{B}$, da velja

$W' + W' \subset V$ in $W + W \subset W'$ in ker je $0 \in W$, velja

$$W + W + W = W + W + W + 0 \subset W' + W' \subset V\,. \tag{6.2}$$

Najdimo tako okolico $T \in \mathcal{B}$ niča, da velja

$$\lambda T \subset W\,. \tag{6.3}$$

To naredimo tako, da najprej poiščemo tako naravno število n, da velja

$$n \le |\lambda| < n + 1$$

in potem podobno kot smo našli W z večkratno uporabo lastnosti (3) poiščemo $T \in \mathcal{B}$, za katero velja

$$\underbrace{T + \cdots + T}_{n+1} \subset W\,.$$

Povrnimo se nazaj k množici W. Ker je W po (1) absorbirujoča najdemo tak ε, da je $0 < \varepsilon < 1$ in velja implikacija

$$|\eta| \le \varepsilon \Longrightarrow \eta x \in W\,. \tag{6.4}$$

Naj bo ξ tak skalar, da je $|\xi - \lambda| < \varepsilon < 1$ in naj bo $y \in x + T$. Tedaj velja

$$\xi y - \lambda x = (\xi - \lambda)x + \lambda(y - x) + (\xi - \lambda)(y - x)\,. \tag{6.5}$$

Po implikaciji (6.4) je $(\xi - \lambda)x \in W$. Po lastnosti (6.3) je $\lambda(y - x) \in \lambda T \subset W$. Ker je $y - x \in T$, $|\xi - \lambda| < \varepsilon < 1$ in je T uravnovešena, velja tudi

$$(\xi - \lambda)(y - x) \in T \subset W\,.$$

Po enakosti (6.5) in lastnosti (6.2) je torej $\xi y - \lambda x \in W + W + W \subset V$ ali $\xi y \in \lambda x + V \subset U$ za vse $y \in x + T$ in ξ s $|\xi - \lambda| < \varepsilon$. Dokazali smo zveznost množenja s skalarjem v poljubni točki (λ, x).

$\square$

Trditev 6.3.4. *Linearni topološki prostor X je Hausdorffov natanko tedaj, ko za vsak element $x \neq 0$ v X obstaja taka okolica U niča v X, da velja $x \notin U$.*

Dokaz. Če je X Hausdorffov linearni topološki prostor, obstajata za vsak $x \neq 0$ disjunktni okolici za x in 0.

Obratno, naj bosta x in y različni točki v X. Tedaj je $x - y \neq 0$ in po predpostavki obstaja taka okolica U točke 0, ki ne vsebuje $x - y$. V U obstaja taka uravnovešena okolica V niča, da velja $V + V \subset U$. Tedaj sta $x + V$ in $y + V$ disjunktni okolici točk x in y, saj veljajo implikacije

$$z \in x + V \cap y + V \Longrightarrow (z - y) \in ((x - y) + V) \cap V \Longrightarrow (x - y) \in V + V\,.$$

□

Za zveznost linearne preslikave je dovolj zveznost v eni sami točki, kot nam pove naslednji izrek.

Izrek 6.3.5. *Naj bo $A\colon X \to Y$ linearna preslikava iz linearnega topološkega prostora X v linearni topološki prostor Y. Tedaj je A zvezna na X, če je zvezna v kakšni točki $x \in X$.*

Dokaz. Naj bo A zvezna v x. To pomeni, da za poljubno okolico $A(x) + U$ slike, kjer je U okolica niča v Y, obstaja taka okolica $x + V$,kjer je V okolica niča v X, ki se z A preslika v $A(x) + U$.

Ker je A linearna, iz $A(x + V) = A(x) + A(V) \subset A(x) + U$ sledi, da je A zvezna v točki $0 \in X$, saj se v poljubno okolico U niča v Y preslika ta izbrana okolica V niča v X. Odtod pa sledi tudi zveznost v poljubni točki $z \in X$, saj so vse okolice točke $A(z)$ oblike $A(z) + U$, kjer je U okolica niča v Y in tudi okolice točke z oblike $z + V$, kjer je V okolica niča v X.

□

Zato zadošča, da zveznost linearne preslikave med linearnimi topološkimi prostori preverimo le v točki 0.

Definicija. Naj bosta X in Y linearna topološka prostora in naj bo $A\colon X \to Y$ tak izomorfizem vektorskih prostorov, ki je zvezen in je tudi njegov inverz $A^{-1}\colon Y \to X$ zvezna preslikava. Tedaj rečemo preslikavi *linearni homeomorfizem*, za prostora X in Y pa rečemo, da sta *linearno homeomorfna*.

Vaje.

1. Naj bo A absorbirujoča množica v vektorskem prostoru V in naj bo $A \subset B \subset V$. Dokažite, da je tudi B absorbirujoča množica.

2. Dokažite, da maksimum metrika

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

inducira topologijo linearnega topološkega prostora v $\mathbb{R}^n$. Nato s pomočjo posledice 6.2.3 in izreka 1.2.2 dokažite, da je dobljena topologija v $\mathbb{R}^n$ ekvivalentna evklidski topologiji.

3. Ali je družina množic $\{(a, b) \times \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ v $\mathbb{R}^2$ baza za topologijo linearnega topološkega prostora? Ali je $\mathbb{R}^2$ opremljen s tako topologijo Hausdorffov prostor? Katere linearne preslikave iz tega prostora v evklidski prostor $\mathbb{R}^2$ so zvezne?

6.4 Primeri

1. Najbolj enostavna primera linearnih topoloških prostorov sta kar $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{R}$) in $\mathbb{C}$ (nad $\mathbb{C}$).

2. Naslednji primeri so $\mathbb{F}^n$ z evklidsko topologijo, kjer je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. To, da so to LTP najlažje pokažemo tako, da preverimo, da družina $\mathcal{B}$ vseh odprtih krogel s središčem v 0 zadošča vsem pogojem izreka 6.3.3 o bazi okolic niča v linearnem topološkem prostoru. Vse te krogle so očitno absorbirujoče in uravnovešene; za dano kroglo $K(0, r)$ z radijem r in središčem v 0 velja za kroglo $K(0, r/2)$, da je

$$K(0, r/2) + K(0, r/2) \subset K(0, r)\,;$$

   presek končnega števila takih krogel je spet taka krogla in to kar tista z najmanjšim radijem.

3. Naj ima vektorski prostor X *normo*, to je tako preslikavo

$$\|\cdot\| \colon X \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad x \longmapsto \|x\|$$

   za katero velja

   (a) za vsak $x \in X$ velja$\|x\| \geq 0$ in velja ekvivalenca $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

   (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

   (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   Tedaj je X linearni topološki prostor v katerem bazo okolic niča tvorijo množice $B(0, r) = \{x \in X; \|x\| < r\}$. Brez težav preverimo, da so vse te množice absorbirujoče in uravnovešene, spet velja

$$B(0, r/2) + B(0, r/2) \subset B(0, r)$$

   in tudi presek končnega števila takih množic je spet kar enak tisti, ki ima najmanjši radij. Po izreku 6.3.3 je X res linearni topološki prostor. Norma na linearnem topološkem prostoru

X določa na njem tudi metriko s predpisom $d(x, y) = \|x - y\|$; za vajo lahko preverite, da norma in metrika določata isto topologijo na X.

Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p},$$

kjer je $p \geq 1$ realno število. Poleg tega lahko definiramo tudi normo

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_j|;\ 1 \leq j \leq n\}.$$

S pomočjo posledice 6.2.3 ni težko pokazati, da vse te norme porodijo kar evklidsko topologijo.

Primer normiranega linearnega topološkega prostora je tudi prostor $C([0, 1])$ vseh zveznih funkcij iz intervala $[0, 1]$ v $\mathbb{R}$. Ker je interval $[0, 1]$ kompakten, vsaka zvezna funkcija $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ na njem doseže v neki točki maksimum in zato lahko v $C([0, 1])$ definirano normo

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Brez težav lahko ugotovimo, da so vse potence $x \mapsto x^n$ v $C([0, 1])$ linearno neodvisne, kar nam pove, da je $C([0, 1])$ neskončno dimenzionalen LTP.

4. V nekaterih primerih je norma v LTP porojena s skalarnim produktom. *Skalarni produkt* v vektorskem prostoru X nad obsegom $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ je taka preslikava

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{F}, \qquad (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

da velja za poljubne vektorje $x, y, z \in X$ in skalar $\lambda \in \mathbb{F}$:

(a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, velja $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$);

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$ in $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ porodi normo $\|\cdot\|$ s predpisom

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Konkretni primer linearnega topološkega prostora s skalarnim produktom (v [10] se za take prostore uporablja izraz *unitarni prostor*) je prostor $C([0,1])$ zveznih funkcij iz $[0,1]$ v $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\,dx\,,$$

za poljubni funkciji $f, g \in C([0,1])$. Normo, ki jo porodi ta skalarni produkt, ponavadi označimo z $\|\cdot\|_2$.

Ni težko pokazati, da norma $\|\cdot\|_\infty$ inducira finejšo topologijo na $C([0,1])$ kot norma $\|\cdot\|_2$. To nam pove, da »identiteta«

$$(C([0,1]), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)\,, \qquad f \longmapsto f$$

ni zvezna preslikava.

5. Topologija v linearnem topološkem prostoru je lahko določena tudi z družino seminorm. *Seminorma* v vektorskem prostoru X nad obsegom $\mathbb{F}$ je taka preslikava

$$p\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

za katero velja za poljubna vektorja x, y in skalar λ

(a) $p(x) \geq 0$;

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

(c) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

Seminorme $\{p_t; t \in T\}$ v vektorskem prostoru X določajo družino množic

$$V_{t,\varepsilon} = \{x \in X; p_t(x) \leq \varepsilon\}, \tag{6.6}$$

kjer je ε poljubno pozitivno realno število. Ni težko preveriti, da so vse množice oblike

$$V_{t_1,\varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_{t_n,\varepsilon_n}, \tag{6.7}$$

$t_i \in T, \varepsilon_i \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$, absorbirujoče in uravnovešene. Za množico $U = V_{t_1,\varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_{t_n,\varepsilon_n}$ obstaja množica $W = V_{t_1,\varepsilon_1/2} \cap \ldots \cap V_{t_n,\varepsilon_n/2}$, da velja $W + W \subset U$. Poleg tega je končni presek množic oblike (6.7) seveda spet množica take oblike. Po izreku 6.3.3 tako družina seminorm res določa neko topologijo v vektorskem prostoru X, s katero X postane linearni topološki prostor.

Konkretni primer linearnega topološkega prostora, v katerem je topologija določena z množico seminorm (za tak linearni topološki prostor rečemo, da je *lokalno konveksen*) je prostor $D([0,1])$ vseh poljubnokrat zvezno odvedljivih funkcij iz $[0,1]$ v $\mathbb{R}$ z družino seminorm

$$p_k(f) = \max_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x)|, \qquad f \in D([0,1]),$$

za poljubni $k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$; pri tem je $f^{(0)} = f$; za odvode v točki 0 vzamemo desne, v točki 1 pa leve odvode. Seminorma p_0 je celo norma (saj velja $p_0(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$). Označimo z $(D([0,1]), p_0)$ linearni topološki prostor, ki ga sestavlja isti vektorski prostor kot $D([0,1])$, a opremljen s topologijo norme p_0. Pokažimo, da je topologija, ki jo določajo vse seminorme p_i finejša (in ne enaka) od topologije, ki jo določa norma p_0. Zaradi posledice 6.2.3 zadošča primerjati bazi okolic niča.

Če uporabimo oznake iz enakosti (6.6), je ε-krogla s središčem v 0 v $(D([0,1]), p_0)$ enaka $V_{0,\varepsilon}$ in tako tudi okolica niča v $D([0,1])$, obratno pa okolica $V_{1,1}$ ni okolica niča v $(D([0,1]), p_0)$, saj ne vsebuje nobene množice $V_{0,\varepsilon}$; naj si bo ε še tako majhen (a pozitiven), bo vseboval funkcijo $f(x) = \varepsilon \sin(k\pi/2x)$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1/\varepsilon$, ki ima v kakšni točki intervala $[0,1]$ odvod večji od 1. Torej je topologija v $D([0,1])$ res finejša (in ne enaka) topologiji, ki jo porodi norma p_0. To pa tudi pomeni, da je »identiteta«

$$(D([0,1]), p_0) \longrightarrow D([0,1]), \qquad f \longmapsto f$$

linearna preslikava, ki pa ni zvezna.

Vaja. Dokažite, da norma $\|\cdot\|_\infty$ inducira finejšo topologijo na $C([0,1])$ kot norma $\|\cdot\|_2$. (Namig: za dani $\varepsilon > 0$ poiščite zvezno funkcijo, katere maksimum na $[0,1]$ je 1, njen integral pa je manjši od ε in uporabite posledico 6.2.3.

Literatura

[1] James Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[2] Ryszard Engelking, Karol Siekłucki: *Topology. A Geometric Approach*, Sigma Series in Pure Mathematics **4**, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.

[3] Anatolij Fomenko: *Visual Geometry and Topology*, Springer--Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

[4] Joel Franklin: *Methods of Mathematical Economics*, *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[5] William S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics **56**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[6] William S. Massey: *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics **127**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[7] James R. Munkres: *Topology, a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[8] Niko Prijatelj: *Matematične strukture III*, DZS, Ljubljana, 1972.

[9] Anton Suhadolc: *Linearni topološki prostori*, DMFA, Ljubljana, 1979.

[10] Jože Vrabec: *Metrični prostori*, DMFA, Ljubljana, 1990.

[11] Albert Wilansky: *Topology for Analysis*, Xerox College Publishing, Lexington (MA), Toronto, 1970.

Stvarno kazalo