Наш семинар: математические сюжеты

Характеристические классы для начинающих

Д. Реповш*　　　А. Б. Скопенков†

'You mean ... ' he would say, and then he would rephrase what I had said in some completely simple and concrete way, which sometimes illuminated it enormously, and sometimes made nonsense of it completely.

I. Murdoch. Under the Net[1)]

§1. Введение

Теория препятствий является фундаментальной частью алгебраической топологии и имеет многочисленные применения за ее пределами. К сожалению, в существующих изложениях изучение теории препятствий начинается с длительного освоения немотивированных абстрактных понятий и теорий. Однако основные идеи этой теории можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний в топологии. Такому изложению и посвящена настоящая заметка, где идеи

*E-mail: dusan.repos@uni-lj.si
Работа частично поддержана исследовательским грантом Министерства образования, науки и спорта республики Словения №101–509.
†E-mail: skopenko@mccme.ru
Работа частично поддержана грантом РФФИ №99-01-00009.

1) «Вы хотите сказать ... » — начинал он и пересказывал мои слова конкретно и просто, после чего моя мысль либо оказывалась много понятнее и глубже, либо оборачивалась полнейшей чепухой. (А. Мердок. «Под сетью», пер. с англ. М. Лорие.)

теории препятствий продемонстрированы на простейших частных случаях. В ней существенно упрощен и доработан материал из [RS00, §3]. Основным преимуществом перед [RS00, §3] является возможность наглядно *изображать* препятствия.

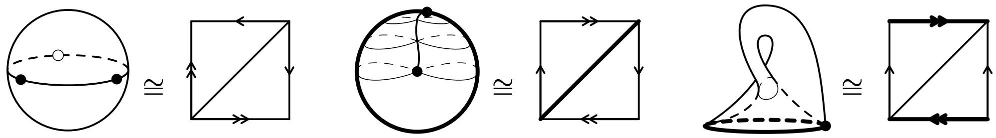
Теория препятствий основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности, олимпиадных) задач: *невозможность* некоторой конструкции можно доказать путем построения алгебраического *препятствия*, или *инварианта* (например, из соображений четности). Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии аналогичным образом естественно приводят к похожим друг на друга *препятствиям*. В настоящей заметке этот процесс продемонстрирован на примере наиболее наглядных топологических задач.

Настоящая заметка основана на цикле лекций, прочитанных вторым автором в летней школе «Современная математика», организованной Российской Академией Наук и Московским Центром Непрерывного Математического Образования под Дубной в июле 2001 г. Выражаем благодарность М. Н. Вялому за многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения, а также за подготовку рисунков.

§2. Советы читателю

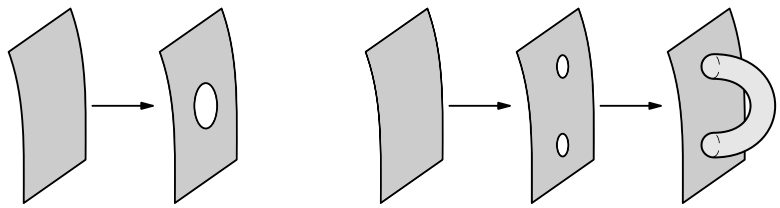
Настоящая заметка предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих топологией, но мы смеем надеяться, что она будет интересна и специалистам. В этом параграфе мы приведем несколько советов для читателей-нетопологов (читателю, уже знакомому с алгебраической топологией, достаточно прочитать два последних абзаца). Для понимания §3 – §6 достаточно обычной геометрической интуиции, а для понимания бóльшей части §7 достаточно интуитивного представления о трехмерных многообразиях. В частности, все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями «группы гомологий» и «характеристические классы») естественно возникают и строго *определяются* в процессе доказательства теорем. Мы не требуем от читателя знакомства с алгебраическим понятием группы, в тексте можно воспринимать это слово как синоним слова «множество».

Напомним понятие двумерного многообразия. Любое (компактное связное) двумерное многообразие (2-многообразие) N может быть получено из сферы, проективной плоскости или бутылки Клейна (рис. 1) приклеиванием g ручек и вырезанием h дырок (рис. 2). Здесь $g = g(N)$ (*род* многообразия N) и $h = h(N)$ — некоторые числа, однозначно



сфера S^2 проективная плоскость бутылка Клейна

Рис. 1.



вырезание дырки приклеивание ручки

Рис. 2.

определяемые по поверхности N. Двумерное (компактное) многообразие называется *замкнутым*, если в нем нет дырок.

Разбиением двумерного многообразия N называется такое его разбиение на многоугольники, что любые два из них могут пересекаться лишь по объединению их ребер и вершин. При этом внутренность каждого из многоугольников должна быть топологически эквивалентна двумерному диску, т. е. должна разбиваться на части любой замкнутой несамопересекающейся кривой. Например, представленная на рис. 3 ситуация не является разбиением. Примеры разбиений изображены на рис. 1.

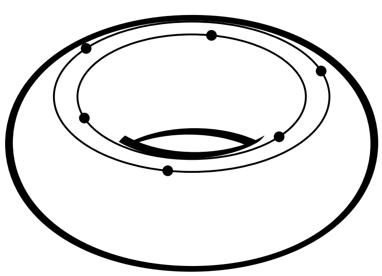


Рис. 3.

Количества вершин, ребер и граней выбранного разбиения обозначаются V, E и F, соответственно. *Эйлеровой характеристикой* разбиения называется число $\chi = V - E + F$. Это число не зависит от разбиения данного многообразия и равно $2 - 2g$, $1 - 2g$ и $-2g$ соответственно для сферы, проективной плоскости или бутылки Клейна с g ручками.

Нетрудно проверить, что любое двумерное многообразие имеет разбиение (при принятом нами определении двумерного многообразия). Одно и то же двумерное многообразие может иметь разные разбиения. Однако многие встречающиеся в тексте объекты (как, например, эйлерова характеристика) не зависят от выбора разбиения T данного многообразия N. В таких случаях мы молчаливо указываем в их обозначениях многообразие N вместо разбиения T (например, пишем $\chi(N)$ вместо $\chi(T)$), оставляя читателю либо доказать независимость от выбора разбиения, либо заменить всюду N на T.

Большая часть материала (например, о связи характеристических классов с формой пересечений) сформулирована в виде задач, обозначаемых жирными числами. Восполнение деталей приводимых в тексте *набросков доказательств* может также служить материалом для самостоятельной работы. Следует подчеркнуть, что задачи не используются в остальном тексте. Кружочком отмечены задачи, для понимания и решения которых достаточно знакомства с этой заметкой. В некоторых других задачах могут встретиться незнакомые вам термины; такие задачи следует просто игнорировать. Отметим также, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение требуется доказать. Материал из [RS00, §§1,2,3.D] и задачи из [RS00, §3.A,B,C] почти не повторяются здесь, но мы рекомендуем заинтересовавшемуся читателю обратиться к этому материалу и порешать указанные задачи. После этого читатель сможет разобрать более продвинутый материал из [FF89, §18, §19, MS74].

Для читателя, уже знакомого с алгебраической топологией, отметим, что мы не используем стандартную терминологию теории препятствий там, где мы считаем, что она неудобна для начинающего. Кроме того, в этой заметке препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных гомологиям ввиду двойственности Пуанкаре). Именно эта точка зрения (двойственная стандартной) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

§3. Ориентируемость

Ориентация двумерного плоского многоугольника задается лежащей в нем окружностью со стрелкой. Двумерное многообразие называется *ориентируемым*, если можно так ввести ориентации на всех гранях некоторого его разбиения, что они *согласованы* для соседних граней, т. е. задают на их общем ребре *противоположные* направления (рис. 4).

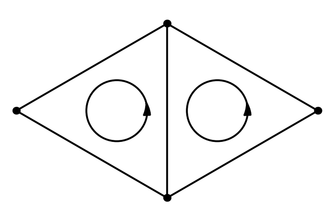
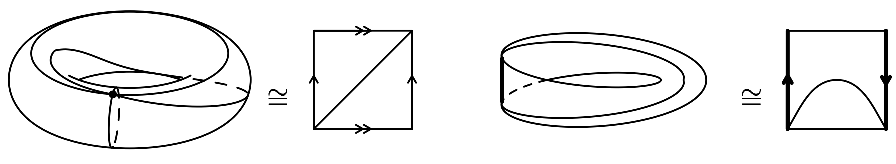


Рис. 4.

Такой набор ориентаций на гранях разбиения называется *ориентацией* многообразия.

В этих определениях вместо слов «некоторого разбиения» можно поставить «любого разбиения» (кто не хочет этого доказывать, может считать, что ниже везде рассматриваются 2-многообразия с фиксированным разбиением). Например, тор (рис. 5) ориентируем, а лист Мёбиуса (рис. 5) неориентируем (докажите!).



тор лист Мёбиуса

Рис. 5.

Теорема ориентируемости. *Каждое из следующих условий на замкнутое двумерное многообразие N равносильно его ориентируемости:*

(W) первый класс Штифеля – Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ *нулевой.*

(M) N *не содержит листа Мёбиуса.*

Критерий (W) является по сути лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраическом языке. Но он важен не только сам по себе, но и как иллюстрация метода теории препятствий (см., в частности, нижеследующую задачу 1). Кроме того, из него легко получается более простой критерий (M) (упражнение).

Определение $H_1(N)$, $w_1(N)$ и доказательство критерия (W). Рекомендуем читателю разобрать это доказательство сначала для случая, когда N — бутылка Клейна (рис. 6). Возьмем некоторое разбиение многообразия N и зададим набор o ориентаций на гранях разбиения. Ребро разбиения покрасим в красный цвет, если ориентации на примыкающих к нему гранях *рассогласованы* (т. е. задают на этом ребре *одинаковые* направления). Объединение красных ребер называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$. Данный набор o ориентаций граней определяет ориентацию многообразия тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \varnothing$. На рис. 1, 5 и 6 жирными линиями изображены некоторые представители ω первого класса Штифеля – Уитни (т. е. препятствующие циклы). Легко проверить, что в графе $\omega(o)$ из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Подграфы выбранного разбиения с таким условием называются *циклами.* Чтобы не путать их с циклами в смы-

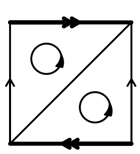


Рис. 6.

сле теории графов, их можно называть гомологическими циклами, но мы этого делать не будем.

Если $\omega(o) \neq \varnothing$, то o не определяет ориентации многообразия, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o, так чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o. При изменении ориентации одной грани к $w(o)$ прибавляется (по модулю 2) граница этой грани. При изменении ориентации нескольких граней к $w(o)$ прибавляется симметрическая разность (сумма по модулю 2) границ этих граней. Будем называть также *границей* сумму границ нескольких граней.

Рассмотрим операцию симметрической разности (иными словами, суммы по модулю 2) на множестве всех циклов. Назовем циклы ω_1 и ω_2 *гомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ есть граница. Нетрудно понять, что если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o', так чтобы получилось $\omega(o') = \varnothing$. Нетрудно также понять, что при изменении набора o ориентаций препятствующий цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл.

Ясно, что гомологичность является отношением эквивалентности на множестве циклов. Группа $H_1(N)$ классов эквивалентности (т.е. циклов с точностью до гомологичности) называется *одномерной группой гомологий поверхности* N *(с коэффициентами в* $\mathbb{Z}_2$*)*. Можно доказать, что она зависит именно от N, а не от выбранного разбиения. Класс гомологичности препятствующего цикла $\omega(o)$ в $H_1(N)$ является *полным* препятствием к ориентируемости многообразия N. Он и называется первым классом Штифеля – Уитни. $\square$

При рассуждениях с гомологическими классами обычно сначала работают с представляющими их циклами, а потом доказывают независимость от выбора цикла в данном классе гомологий.

В этих задачах через N обозначается 2-многообразие.

1^0. Многообразие $N - \omega$ ориентируемо для любого представителя ω класса $w_1(N)$.

2^0. Сформулируйте и докажите аналог теоремы ориентируемости для многообразий с краем (обозначение: $w_1(N) \in H_1(N, \partial N)$). Нарисуйте представитель первого класса Штифеля – Уитни (т. е. препятствующий цикл) на листе Мёбиуса.

3^0. a) $H_1(N) = \mathbb{Z}_2^{2-2\chi(N)}$.

b) Несамопересекающиеся циклы порождают $H_1(N)$.

4. *Пересечением* $a \cap b$ двух гомологических классов $a, b \in H_1(N)$ называется число точек пересечения по модулю 2 представляющих их циклов общего положения. Заметим, что даже если данные гомологические классы совпадают, представляющие их циклы могут быть различны.

a) Докажите корректность этого определения.

b) $w_1(N) \cap a = a \cap a$ для любого $a \in H_1(N)$. Для гомологического цикла a, представляемого замкнутой несамопересекающейся кривой, это выражение равно 1, если при обходе вдоль этой кривой меняется ориентация, и равно 0, если не меняется.

c) $w_1(N) \cap w_1(N) = \chi(N) \mod 2$.

d) Пересечение определяет билинейную форму $H_1(N) \times H_1(N) \to \mathbb{Z}_2$ ранга $2 - \chi(N)$.

e) По планете Тополога, имеющей форму тора, текут реки Меридиан и Параллель. Два маленьких принца прошли по планете и вернулись в исходную точку, причем один из них переходил Меридиан 10 раз, а Параллель 17 раз (трансверсально), а другой — 9 раз и 12 раз, соответственно. Докажите, что один маленький принц видел следы другого.

f)* Используйте форму пересечений для построения алгоритма нахождения рода графа.

5. Сформулируйте и докажите аналоги теорем и задач этого параграфа для многообразий произвольной размерности.

§4. Классификация расслоений

Используемые в этом параграфе основные понятия теории графов кратко напомнены в [RS00]. Пусть дан граф K. Раскрасим его ребра в разные цвета. Возьмем ленточки тех же цветов и поставим в соответствие концам каждой ленточки вершины, инцидентные соответствующему ребру. Склеим концы ленточек, соответствующие одной и той же вершине. Заметим, что для каждой k — валентность вершины (рис. 7). Полученный раскрашенный двумерный объект называется *расслоением со слоем отрезок* (*или* I*-расслоением*) *над графом* K. Примеры: цилиндр или лист Мёбиуса над окружностью (рис. 5).

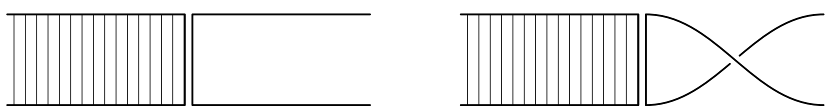


Рис. 7.

Если расставить стрелочки на отрезках склейки, то каждая ленточка либо *перекручена* (стрелки на ее концах противонаправлены), либо *не перекручена* (стрелки на концах сонаправлены). Два расслоения называются *эквивалентными*, если при подходящей расстановке стрелочек любые две ленточки одного цвета одновременно перекручены или одновременно не перекручены.

Заметим, что если рассматривать расслоения над некоторым деревом, то все они оказываются эквивалентными. Неэквивалентные расслоения появляются только при наличии циклических обходов в графе.

Теорема классификации расслоений над графом. *Множество классов эквивалентности* I*-расслоений над* K *находится во взаимно однозначном соответствии с* $H_1(K)$.

Набросок доказательства. Рассмотрим расслоение N над графом K. Выберем набор o стрелочек на отрезках склейки. Поставим на ребре графа K единицу, если соответствующая ленточка оказалась перекрученной, и ноль, если неперекрученной. Назовем полученную расстановку *препятствующей* и обозначим $\omega(o)$ (пояснение к названию, не используемое в дальнейшем: эта расстановка препятствует ориентируемости расслоения, определение которого читатель может дать сам). Группа циклов в графе K определяется аналогично §3, обозначается $H_1(K)$ и называется *одномерной группой гомологий* графа K. Для любого цикла g сумма $\omega(o)\cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от набора o стрелочек. Поэтому формула $w_1(N,K)[g]=\omega(o)\cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1(N)\colon H_1(K)\to\mathbb{Z}_2$. Она называется *первым классом Штифеля – Уитни* расслоения. Доказательство того, что соответствие $[N]\mapsto w_1(N)$ является биекцией, оставляем в качестве упражнения. $\square$

Пусть теперь дана триангуляция T поверхности N. Раскрасим ее грани, ребра и вершины в разные цвета. Возьмем призмочки тех же цветов, что и грани триангуляции T. Раскрасим боковые грани и боковые ребра каждой призмочки в те же цвета, что соответствующие им ребра и вершины соответствующей грани. Отождествим боковые грани призмочек, окрашенные в один и тот же цвет (при этом отождествляются боковые ребра, окрашенные в один и тот же цвет). Заметим, что для каждой боковой грани призмочки это можно сделать двумя способами (рис. 8). Полученный раскрашенный трехмерный объект называется *расслоением со слоем отрезок* (*или I-расслоением*) *над поверхностью* N. Например, регулярная окрестность (т. е. маленькая окрестность без «лишних» дыр) двумерного многообразия в трехмерном является пространством I-расслоения (т. е. является I-расслоением при некоторой раскраске).

Два расслоения называются *эквивалентными*, если на призмочках можно так расставить стрелочки, сонаправленные друг с другом и параллельные боковым ребрам, что стрелочки в одноцветных боковых гранях

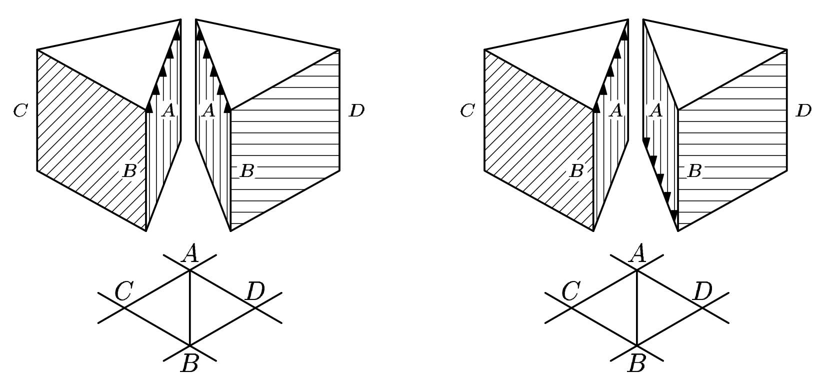


Рис. 8.

призмочек этих двух расслоений одновременно сонаправлены или одновременно противонаправлены.

Теорема классификации расслоений над поверхностью. *Множество I-расслоений над замкнутым 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $H_1(N)$.*

Доказательство теоремы и классификацию расслоений над незамкнутыми 2-многообразиями оставляем читателю в качестве упражнения. О близком понятии утолщений, их ориентируемости и классификации см. [RS00, задачи к §3].

§5. Построение ненулевых векторных полей

Напомним неформально понятие касательного векторного поля. Пусть двумерное многообразие N лежит в евклидовом пространстве (любой размерности) так, что в любой точке многообразия можно провести к нему касательную плоскость (такое вложение называется *гладким*). *Касательным векторным полем* на подмножестве $K \subset N$ называется семейство касательных к N векторов $v(x)$ в точках $x \in K$, непрерывно зависящих от точки $x \in K$. Если многообразие N задано абстрактно, а не как гладкое вложенное многообразие в евклидово пространство, то вместо семейства касательных векторов нужно брать семейство точек $y(x)$, $x \in K$, находящихся на малом расстоянии от точки x. Касательное векторное поле называется *ненулевым*, если все его векторы ненулевые (или, что то же самое, $y(x) \neq x$ для любого $x \in K$).

Исследование векторных полей было начато Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. В этом параграфе, следуя идеям Хайнца Хопфа, мы построим препятствие к существованию ненулевого касательного векторного поля на данном гладком многообразии. Аналогичные результаты для *нормальных* полей приведены в виде задач. Приводимое ниже рассуждение интересно тем, что оно дает явный способ *построения* векторного поля для случая, когда препятствие равно нулю.

1. Впрочем, полезно доказать независимо от общего рассуждения, что на торе и на любом связном двумерном многообразии с непустым краем (не обязательно ориентируемом) существует ненулевое касательное векторное поле.

Теорема Эйлера – Пуанкаре. *Каждое из следующих условий на сферу с ручками N равносильно существованию единичного касательного векторного поля на N:*

(E) число (класс) Эйлера $e(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ *равно нулю*;

(T) *N есть тор.*

Критерий (E) важен не только сам по себе, но и как иллюстрация метода теории препятствий (см., в частности, нижеследующую задачу 2). Кроме того, из него получается более простой критерий (T).

Роль теории препятствий состоит в *сведении* топологических задач на *произвольном* многообразии к похожим задачам для *простейших, модельных* многообразий. Например, теорему Эйлера – Пуанкаре мы сведем к задаче о продолжении векторного поля, заданного на границе диска, на весь диск. Важно, что для применения теории препятствий можно воспользоваться *результатом* решения этих простейших задач, не вникая в его доказательство. Указанные простейшие задачи могут решаться как специфическими методами, так и средствами теории препятствий. В этой заметке мы приводим простейшие задачи и их решения без доказательства.

Определение $H_0(N,\mathbb{Z})$, $e(N)$ и доказательство теоремы Эйлера – Пуанкаре. Рекомендуем читателю разобрать это доказательство сначала для случая, когда N — сфера (см. рис. 9). Слово «поле» будет означать «единичное касательное векторное поле». Возьмем некоторое разбиение многообразия N. Выберем в каждой грани точку и обозначим полученное множество точек через U_0. Очевидно, что можно построить поле на U_0 (рис. 10). Ясно, что это построение однозначно (с точностью до непрерывной деформации в классе единичных касательных векторных полей). Поэтому существование поля на N равносильно продолжимости построенного поля с U_0 на N.

Построим подмножество $U_1 \subset N$ добавлением к U_0 отрезков-перемычек между точками, пересекающих ребра (рис. 10). Малая окрестность каждой перемычки эквивалентна (мы не уточняем, в каком смысле) части плоскости. Если на плоскости лежит отрезок, и на его концах задано поле, то это поле можно продолжить на весь отрезок (рис. 11). Поэтому построенное на U_0 поле можно продолжить на U_1. Заметим, что такое продолжение неоднозначно. Обозначим полученное на U_1 поле через v.

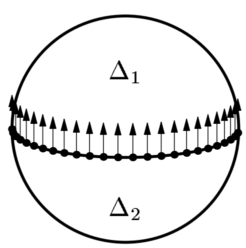


Рис. 9.

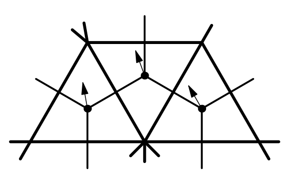


Рис. 10.

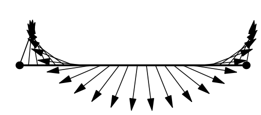


Рис. 11.

Попробуем теперь продолжить поле v, заданное на U_1, на все N. Фиксируем некоторую ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$ и многообразия N. Замыкание Δ любого из дисков в $N - U_1$ эквивалентно части плоскости. «Развернем» диск Δ (вместе с полем на нем) на плоскость согласованно с ориентациями. Ориентация диска Δ (который мы уже считаем лежащим на плоскости) порождает направление на его граничной окружности. При обходе этой окружности вдоль этого направления вектор нашего поля повернется на некоторое целое число оборотов. Поставим это число в вершину исходного разбиения, лежащую в диске Δ. Продолжение поля с $\partial\Delta$ на Δ возможно тогда и только тогда, когда это число равно нулю (докажите!). Полученная расстановка $\varepsilon(v)$ целых чисел в вершинах называется *препятствующей*. Расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Группу всех расстановок целых чисел в вершинах с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^V$, где V — число вершин выбранного разбиения.

Различие между полями v и v' на U_1, совпадающим на U_0, можно измерять (и задавать) так. На каждом ребре поставим число поворотов вектора при последовательном движении вектора первого поля от правой точки из U_0 относительно (ориентированного) ребра e вдоль перемычки к левой точке, и вектора второго поля обратно. Здесь мы вновь пользуемся тем, что малая окрестность каждой перемычки эквивалентна части плоскости. Полученную расстановку назовем *различающей* и обозначим $d(v, v')$: если $d(v, v') = 0$, то поле v на U_1 можно непрерывно продеформировать в поле v' (обратное также справедливо). Группу всех расстановок целых чисел на ребрах выбранного разбиения с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^E$, где E — количество ребер выбранного разбиения.

Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то v не продолжается на N, но еще не все потеряно: можно попытаться так изменить поле v на U_1, чтобы препятствующая расстановка стала равной нулю. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v. При изменении поля на одной перемычке, пересекающей ребро e, «на один оборот» к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ в начале ребра e и -1 в его конце (и 0 на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра e* и обозначается ∂e. Каждому ребру e отвечает «характеристическая» расстановка $e \in \mathbb{Z}^E$ единицы на ребре e и нуля на остальных ребрах.

Назовем расстановки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in Z^V$ *гомологичными*, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = n_1\partial a_1 + \dots + n_s\partial a_s$ для некоторых ребер $a_1, \dots, a_s$ и целых чисел $n_1, \dots, n_s$. Группа $H_0(N, \mathbb{Z})$ расстановок с точностью до гомологичности называется *нульмерной группой гомологий поверхности N с коэффициентами в $\mathbb{Z}$*. Если $d(v, v') = n_1a_1 + \dots + n_sa_s$, то $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = n_1\partial a_1 + \dots + n_s\partial a_s$, откуда следует, что *класс Эйлера* $e(N) = [\varepsilon(v)] \in H_0(N,\mathbb{Z})$ не зависит от v. Значит, $e(N)$ является препятствием к существованию поля на N.

Доказательство независимости группы гомологий и класса Эйлера от разбиения мы оставляем читателю в качестве задачи. Так как $d(v,v')$ может принимать *любое* значение вида $n_1a_1+\dots+n_sa_s$, то в случае $\varepsilon(v) = n_1\partial a_1+\dots+n_s\partial a_s$ можно изменить v на v', чтобы получилось $\varepsilon(v')=0$. Значит, препятствие $e(N)$ является полным и критерий (E) доказан.

Равносильность условий (E) и (T) вытекает из задачи 2. □

2. На многообразии $N - \operatorname{supp}\varepsilon$ есть поле для любого представителя ε класса $e(N)$.

3. $H_0(N,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ и $e(N)=\chi(N)=2-2g(N)$ (указание: для поля v, изображенного на рис. 5, $e(v)=1+1=2$; разберитесь, почему не $1-1=0$).

4. Определите класс Эйлера $e(N)$ как полное препятствие к построению ненулевого касательного векторного поля на замкнутом *неориентируемом* двумерном многообразии N. На каких замкнутых неориентируемых двумерных многообразиях существует единичное касательное векторное поле?

5. S^1-расслоения над двумерными многообразиями и их эквивалентность определяются аналогично I-расслоениям с заменой призмочек на полнотория, являющиеся прямыми произведениями окружности S^1 на грани разбиения. Например, граница регулярной окрестности двумерного многообразия в $\mathbb{R}^4$ является пространством S^1-расслоения. Докажите, что S^3 является пространством S^1-расслоения над S^2. Докажите, что множество S^1-расслоений над замкнутым ориентируемым связным 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}$ (указание: определите число или класс Эйлера I-расслоения). Как изменится ответ для произвольных 2-многообразий?

6. Любое 2-многообразие гладко вложимо в $\mathbb{R}^4$.

7. Пусть фиксировано гладкое вложение ориентируемого двумерного многообразия N в $\mathbb{R}^4$. *Нормальным векторным полем* на подмножестве $K\subset N\subset\mathbb{R}^4$ называется непрерывное семейство нормальных к N векторов $v(x)$ в точках $x\in K$, непрерывно зависящих от точки $x\in K$. Определение пересечения дано в задаче 4 §3; необходимый ниже аналог для целых коэффициентов читатель легко сформулирует сам.

a) Постройте препятствие $\bar{e}(N)\in H_0(N,\mathbb{Z})$ (*нормальное число Эйлера*) к существованию ненулевого нормального векторного поля.

b) Нормальное число Эйлера равно $N\cap N$.

c) Нормальное число Эйлера равно нулю.

d) Существует пара ортогональных векторных полей, нормальных к многообразию N.

8. Для *неориентируемого* 2-многообразия N

a) Решите аналог задачи 5 (число Эйлера будет целым, а не вычетом по модулю 2!).

b) $\bar{e}(N)=e(N) \mod 2$.

9. a) (Теорема Хопфа.) На замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда *класс Эйлера* $e(N)\in H_0(N,\mathbb{Z})$ нулевой.

b) Если N связно, то $H_0(N,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ и $e(N)=\chi(N)$. Далее, $e(N^{2k+1})=0$ и $e(S^{2k})=2$.

c) Если N связно и имеет непустой край, то класс Эйлера лежит в $H_0(N,\partial N,\mathbb{Z})\cong 0$ и, значит, $e(N)=0$.

d) Определите *класс Эйлера* $e(N)$ как полное препятствие к построению единичного касательного векторного поля на неориентируемом n-многообразии N.

10. $e(N)=\operatorname{diag}\cap\operatorname{diag}$, где $\operatorname{diag}\subset N\times N$ есть диагональ.

§6. Классификация ненулевых векторных полей

Пусть на двумерном многообразии N существует ненулевое касательное векторное поле. В некоторых приложениях встречается следующий вопрос: *сколько* существует таких полей (с точностью до эквивалентности) на этом многообразии? При этом два векторных поля называются *эквивалентными* (или *гомотопными*), если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается касательным и ненулевым.

Теорема Хопфа – Уитни. *Множество $V(N)$ ненулевых касательных векторных полей на торе N с точностью до гомотопности находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H_1(N,\mathbb{Z}) \cong \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ одномерных гомологий тора N с целыми коэффициентами. Более того, существует такое отображение $d: V(N)\times V(N) \to H_1(N,\mathbb{Z})$, что $d(u,\cdot)$ является биекцией и $d(u,v)+d(v,w) = d(u,w)$ для любых $u,v,w \in V(N)$.*

Часть «более того» (означающее, что соответствие $V(N) \to H_1(N,\mathbb{Z})$ в некотором смысле «естественное») делает теорему Хопфа – Уитни интересной. Ведь если бы этого свойства не было, теорема утверждала бы лишь то, что множество $V(N)$ счетно.

Определение $H_1(N,\mathbb{Z})$ и набросок доказательства. Рассмотрим некоторое разбиение многообразия N. Воспользуемся множествами U_0 и U_1, определенными в предыдущем параграфе. Фиксируем некоторое поле v на многообразии N. Построенное в дальнейшем соответствие между $V(N)$ и $H_1(N,\mathbb{Z})$ будет зависеть от выбора поля v. Любое другое поле u гомотопно такому, которое совпадает с v на U_0. Поэтому достаточно классифицировать векторные поля, совпадающие с v на U_0, с точностью до гомотопии (правда, эта гомотопия может менять поле даже на U_0). Итак, будем считать, что u совпадает с v на U_0.

Фиксируем произвольно направление на каждом ребре разбиения. Поскольку тор ориентируем, то тем самым для каждой ленточки из $U_1 - U_0$, соединяющей два диска из U_0, можно выбрать *начальный* и *конечный* из этих дисков. Пусть точка x движется по перемычке, пересекающей ребро e, от ее начальной точки к ее конечной точке, а потом обратно. При движении «туда» будем откладывать от точки x вектор $u(x)$, а при движении «обратно» — вектор $v(x)$. Поскольку перемычка топологически эквивалентна части плоскости, то корректно определено число оборотов откладываемого вектора. Поставим на ребре e это число. Полученную расстановку обозначим $\gamma(u)$.

Поскольку поле u продолжается на $N - U_1$, то из предыдущего параграфа вытекает, что для любой вершины триангуляции сумма чисел на входящих в нее ребрах равна сумме чисел на выходящих из нее ребрах. Такие расстановки называются *циклами* (придумайте, как их можно наглядно изображать!). Множество всех расстановок целых чисел на ребрах разбиения с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^E$. Если u совпадает с v на U_0 и $\gamma(u) = 0$, то поля u и v гомотопны. Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии. Для грани a разбиения изменим поле u так, чтобы вектор в a сделал один оборот против часовой стрелки, вектора в маленькой окрестности грани a «потянулись» за вектором в a, а вне этой маленькой окрестности поле осталось прежним. В результате получим поле v. Понятно, что $\gamma(u)$ есть расстановка ± 1 (в зависимости от ориентации) на ребрах, ограничивающих грань a, и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *границей грани* a и обозначается ∂a.

В окрестностях граней $a_1, \ldots, a_s$ сделаем описанную выше гомотопию поля u, поворачивая вектора в этих гранях на $n_1, \ldots, n_s$ оборотов, соответственно. Эту гомотопию можно задать расстановкой чисел $n_1, \ldots, n_s$ на гранях $a_1, \ldots, a_s$, соответственно (и нулей на остальных гранях). Обозначим полученную расстановку через Γ, а полученное поле через u_Γ. Тогда $\gamma(u) - \gamma(u_\Gamma) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$. Назовем циклы $\gamma_1, \gamma_2 \in Z_1$ *гомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$ для некоторых граней $a_1, \ldots, a_s$ и целых чисел $n_1, \ldots, n_s$. Группа $H_1(N, \mathbb{Z})$ циклов с точностью до гомологичности называется *одномерной группой когомологий графа* K *с коэффициентами в* $\mathbb{Z}$. Обозначим $d(u) = [\gamma(u)] \in H_1(N, \mathbb{Z})$.

Теперь рассмотрим гомотопию u_t между полями u_0 и u_1, совпадающими на U_0. Поставим на каждой грани a число оборотов при изменении t от 0 до 1 вектора $u_t(x)$, где x — некоторая точка в a (число оборотов не зависит от выбора точки $x \in a$). Полученную расстановку обозначим $\Gamma(\{u_t\})$. Легко проверить, что $\gamma(u_0) - \gamma(u_1) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_s\partial a_s$. Значит, $d(u_0) = d(u_1)$. Поэтому отображение $d\colon V(N) \to H_1(N, \mathbb{Z})$ корректно определено.

Если $d(u_0) = d(u_1)$ для некоторых полей u_0 и u_1, совпадающих на U_0, то $\gamma(u_0) - \gamma(u_1) = n_1\partial a_1 + \cdots + n_V\partial a_V$ для некоторых чисел $n_1, \ldots, n_V \in \mathbb{Z}$. Обозначая через $\Gamma \in \mathbb{Z}^V$ расстановку чисел $n_1, \ldots, n_V$ в вершинах $a_1, \ldots, a_V$, имеем $u_0 \simeq u_{0,\Gamma} \simeq u_1$. Поэтому отображение d инъективно.

Чтобы доказать сюръективность отображения d, возьмем произвольный цикл γ. Возьмем поле u равным v на U_0. На ленточке, пересекающей ребро e, возьмем $\gamma(e)$-кратную подкрутку поля v (см. определение цикла $\gamma(u)$). Для построенного поля u имеем $\gamma(u) = \gamma$, поэтому $d(u) = [\gamma]$. Доказательство инъективности оставляем читателю в качестве упражнения. □

1. Классифицируйте ненулевые касательные векторные поля с точностью до гомотопности на других 2-многообразиях.

§7. Построение ортонормированных систем векторных полей

Другие характеристические классы можно «увидеть» только на многообразиях размерности три и выше. *Трехмерным многообразием* называется (хорошее) пространство, локально гомеоморфное трехмерному шару. Примерами 3-многообразий являются произведения 2-многообразий на отрезок или окружность (см. также §4 и задачу 5 к §5).

Ученик Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел задачу о построении *пары, тройки и т. д. ортонормированных* касательных векторных полей на данном многообразии (ввиду каноничности процесса Грама – Шмидта ортогонализации ортонормированность можно заменить на линейную независимость). Развивая идеи Хопфа, около 1934 г. он пришел к определению характеристических классов (окончательная формализация была завершена Норманом Стинродом). Любопытно, что Штифель начал с частного случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует пары ($\Leftrightarrow$ тройки) ортонормированных касательных векторных полей. Затем, используя свою теорию, он доказал, что такого многообразия нет. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия (например, несуществование алгебр с делением на $\mathbb{R}^n$ для $n \neq 2^k$). В этом параграфе мы приводим без доказательства результат *вычисления* препятствий, дающий указанные интересные следствия.

1. Если 3-многообразие N ориентируемо, то любую *пару* ортонормированных векторных полей можно дополнить до *тройки* ортонормированных векторных полей.

Теорема Штифеля (трехмерная). *На замкнутом 3-многообразии N существует пара ортонормированных касательных векторных полей тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля – Уитни $w_2(N) \in \in H_1(N)$ нулевой.*

Вычисление. *$w_2(N) = 0$ для ориентируемого 3-многообразия N.*

Следствие. *Любое ориентируемое 3-многообразие имеет тройку ортонормированных касательных векторных полей.*

Набросок определения $H_1(N)$, $w_2(N)$ и доказательства. Будем называть пару ортонормированных касательных векторных полей просто парой полей. Возьмем некоторое разбиение многообразия N (определение разбиения трехмерного многообразия читатель может дать сам по аналогии с двумерным случаем). Выберем по точке в каждом трехмерном многограннике разбиения. Построим пару полей в этих точках (рис. 12). Продолжим пару полей на перемычку, соединяющую две такие точки и протыкающую двумерную грань триангуляции (рис. 12). Для этого заметим, что окрестность этой перемычки эквивалентна подмножеству пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда каждой паре векторов в точке x на этой перемычке

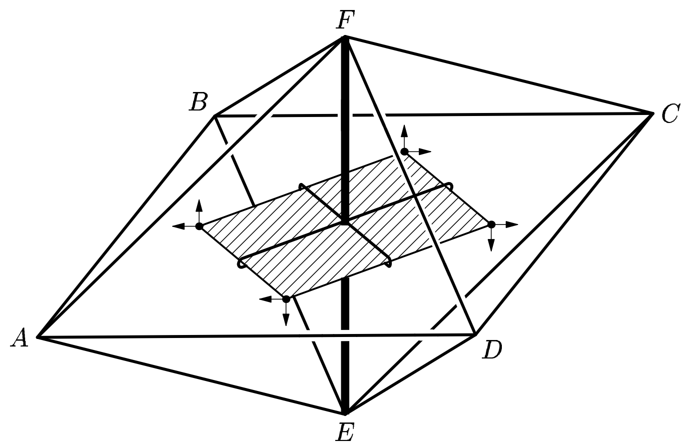


Рис. 12. *Многогранники разбиения: $ADEF$, $ABEF$, $BCEF$, $CDEF$*

сопоставится пара векторов в $\mathbb{R}^3$, а всей перемычке — отображение ее в пространство SO_3 ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^3$. Это пространство эквивалентно:

пространству движений пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих начало координат неподвижным;

пространству вращений пространства $\mathbb{R}^3$ относительно прямых, проходящих через начало координат;

пространству прямых в $\mathbb{R}^4$, проходящих через фиксированную точку;

замкнутому трехмерному шару, на границе которого склеены диаметрально противоположные точки.

Все эти эквивалентности мы оставляем без доказательства (см. замечание после формулировки теоремы Эйлера – Пуанкаре), а в дальнейшем используем последнюю из перечисленных «моделей» пространства SO_3. Для этой модели очевидно, что пространство SO_3 связно. Отсюда следует, что построенная пара векторных полей продолжается на объединение перемычек.

Продолжим пару полей на пленку, натянутую на точки и перемычки и протыкаемую ребром триангуляции (рис. 12). Отображение граничной окружности пленки в SO_3 соответствует элементу из группы $\pi_1(SO_3)$ непрерывных отображений окружности в SO_3 с точностью до непрерывной деформации. Будем использовать без доказательства равенство $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$. Поясним лишь, что единица этой группы представляется диаметром трехмерного шара, из которого SO_3 получается склейкой. Если полученный элемент группы $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$ ненулевой, покрасим ребро, протыкающее пленку, в красный цвет. Таким образом, заданию пары

w ортонормированных векторных полей на объединении перемычек соответствует красный подграф $\varepsilon(w)$ данного разбиения. В нашем случае число красных ребер, выходящих из каждой вершины, четно (докажите!). Подграфы с таким условием называются *(одномерными) циклами.* Далее аналогично предыдущему определяется гомологичность циклов, группа $H_1(N)$ и *второй класс Штифеля – Уитни* $w_2(N) = [\varepsilon(w)] \in H_1(N)$. Аналогично предыдущему проверяется, что $w_2(N) = 0$ тогда и только тогда, когда w можно продолжить на объединение U_2 перемычек и пленок.

Пару w ортонормированных векторных полей на U_2 всегда можно продолжить на все многообразие N. Это доказывается аналогично проделанному построению с использованием того факта, что любое отображение двумерного диска, являющегося границей трехмерного шара, в SO_3 можно продолжить на весь шар. Этот факт мы не доказываем (для специалистов отметим, что он следует из равенств $\pi_2(SO_3) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$). Поэтому препятствие $w_2(N)$ является полным. $\square$

2. a) Нарисуйте какой-нибудь представитель второго класса Штифеля – Уитни для $\mathbb{R}P^3$ и для $\mathbb{R}P^2 \times S^1$ (и для других известных вам примеров 3-многообразий).

b) Для любой триангуляции произвольного трехмерного многообразия N объединение ребер ее барицентрического подразделения является циклом, представляющим класс $w_2(N)$.

3. (Сравните с задачей 4 из §3.) Пусть N — замкнутое связное ориентируемое четырехмерное многообразие.

a) Определите $H_2(N)$ и $w_2(N) \in H_2(N)$ как препятствие к существованию *тройки* ортонормированных векторных полей (это препятствие уже не будет полным).

b) То же как *полное* препятствие к существованию спинорной структуры на N (т. е. к возможности извлечь корень из любого тензора на N; авторы благодарят Ю. П. Соловьёва за указание на эту интерпретацию). Докажите, что вне любого цикла, представляющего $w_2(N)$, можно ввести спинорную структуру.

c) Определите форму пересечений $\cap : H_2(N) \times H_2(N) \to \mathbb{Z}_2$ и докажите, что $a \cap a = w_2(N) \cap a$ для любого $a \in H_2(N)$ (это выражение равно нулю тогда и только тогда, когда в окрестности любого цикла, представляющего a, можно ввести спинорную структуру).

d) $w_2(N) \cap w_2(N) = \chi(N) \mod 2$.

e) Сформулируйте и докажите аналоги задач (a)-(d) для неориентируемых или незамкнутых 4-многообразий.

f) Определите *число Понтрягина* $p_1(N) \in H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ как полное препятствие к существованию четверки векторных полей, имеющей ранг не менее 3 в каждой точке.

g)* Число Понтрягина равно утроенной сигнатуре формы пересечений многообразия N.

h)* Если N ориентируемо и гладко вложимо в $\mathbb{R}^6$, то $w_2(N) = 0$ и $p_1(N) = 0$. Например, $\mathbb{C}P^2$ невложимо в $\mathbb{R}^6$.

ТЕОРЕМА ШТИФЕЛЯ (МНОГОМЕРНАЯ). *Если на замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует k ортонормированных касательных векторных полей $(1 < k < n)$, то $(n-k+1)$-й класс Штифеля – Уитни $W_{n-k+1}(N) \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ нулевой. Через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначается группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i.*

Пример вычисления. *Обозначим через $w_i(N) \in H_{n-i}(N, \mathbb{Z}_2)$ приведение по модулю 2 препятствия $W_i(N)$ (оно легче вычисляется). В частности, $w_i(\mathbb{R}P^{n-1}) = C_n^i \bmod 2$.*

Следствие. *Если на $\mathbb{R}^n$ имеется структура алгебры с делением, то n есть степень двойки.*

Набросок определения $H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$, $W_{n-k+1}(N)$ и доказательства. Пусть $V_{n,k}$ — многообразие Штифеля ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$. Аналогично предыдущему, из соотношений $\pi_i(V_{n,k}) = 0$ для $i < n-k$, следует, что k полей беспрепятственно строятся на $(n-k)$-остове. Поскольку $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}_{(n-k)}$ для $1 < k < n$, то при продолжении поля на $(n-k+1)$-остов появляется препятствие $W_{n-k+1} \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$. Это препятствие уже не обязательно является полным. □

4. a) Если $C_n^i = 0 \mod 2$ для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$, то n есть степень двойки.

b) Выведите следствие из примера вычисления.

5. Описанное выше определение класса w_1 равносильно данному в §1.

6. Для любой триангуляции произвольного замкнутого n-мерного многообразия N объединение k-мерных симплексов ее барицентрического подразделения является циклом по модулю 2, представляющим класс $w_{n-k}(N)$.

Список литературы

[FF89] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* М.: Наука. 1989.

[MS74] Milnor J. W., Stasheff J. D. *Characteristic Classes.* Ann. of Math. St. Vol. 76, 1974. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (Русск. перевод: Милнор Дж., Сташефф Дж. *Характеристические классы.* М.: Мир, 1979.)

[RS00] Реповш Д., Скопенков А. *Теория препятствий для начинающих* // Математическое Просвещение, сер.3, №4, 2000. С. 151–176.